

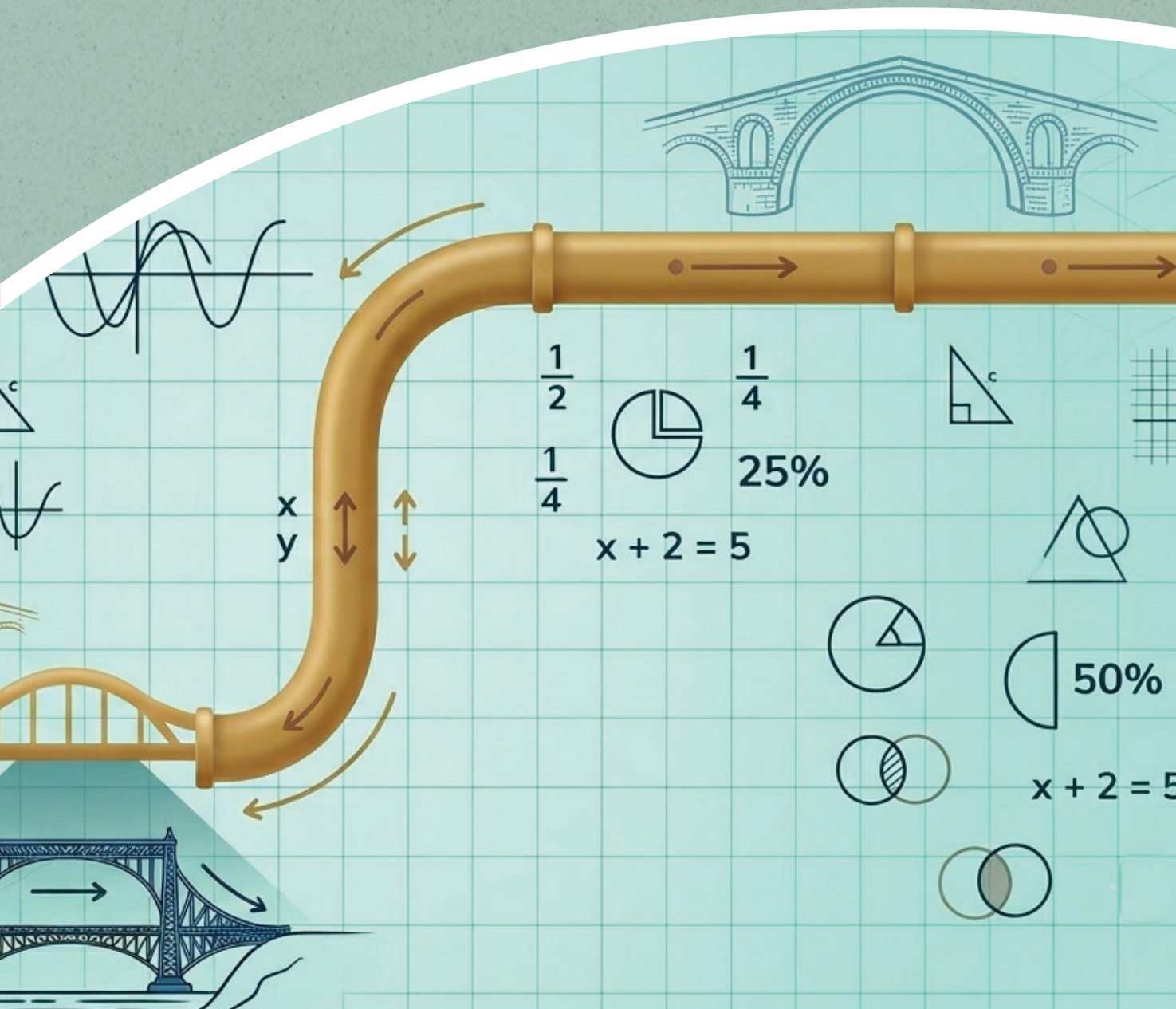


განათლების, მეცნიერებისა და
ახალგაზრდობის სამინისტრო

მათემატიკა

7

მოსწავლის ნიშნი
პირველი ნაწილი



ნანა ჯაფარიძე, ნანი წულაია,
ივანე გოქაძე, ლია გიგაური

მათემატიკა 7

მოსწავლის წიგნი
პირველი ნაწილი

სახელმძღვანელო შექმნილია
საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტროს მიერ

მათემატიკა

VII კლასი, I ნაწილი

მოსწავლის წიგნი

საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტრო
პირველი გამოცემა, თბილისი, 2026 წ.

ავტორები:

ნანა ჯაფარიძე

ნანი წულაია

თანაავტორები:

ივანე გოქაძე

ლია გიგაური

საგნის ექსპერტ-კონსულტანტი: ვახტანგ ჯაოშვილი

სამეცნიერო რეცენზენტები: ივანე კვიტაშვილი, ალექსანდრე მესხი

ფსიქოლოგი-მეთოდისტი: ნუცა სადარაძე

რედაქტორი: თამარ აბულაძე

ილუსტრატორი: მაია ფეიქრიშვილი

დამკაბადონებელი: მაია ფეიქრიშვილი

ყდის დიზაინერი: ნინო ხვინგია

სახელმძღვანელო განკუთვნილია მეშვიდე კლასის მოსწავლეებისთვის და შექმნილია ეროვნული სასწავლო გეგმის მოთხოვნების შესაბამისად.

სახელმძღვანელოში გამოყენებულია ციფრული ლიცენზირებული პლატფორმებიდან შექმნილი/მოპოვებული ფოტოილუსტრაციები. ასევე, ფოტოილუსტრაციების წყაროდ გამოყენებულია Wikimedia Commons; ცალკეული ფოტოილუსტრაციები შექმნილია/დამუშავებულია ხელოვნური ინტელექტის გამოყენებით. ერთი ფოტოს წყაროა საქართველოს პარლამენტის ეროვნული ბიბლიოთეკა/ციფრული ფოტომატიანე. საქართველოს პარალიმპიური კომიტეტის ნებართვით გამოყენებულია პარალიმპიელების ფოტოები.

სახელმძღვანელოს კომპლექტის შემადგენლობა:

მოსწავლის წიგნი, I და II ნაწილები;

მასწავლებლის წიგნი, I და II ნაწილები.



განათლების, მეცნიერებისა და
ახალგაზრდობის სამინისტრო

© საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტრო

ISBN 978-9941-8-8914-1

საქართველოს სახელმწიფო სიმბოლოები - დროშა, გერბი და ჰიმნი



თავისუფლება

ჩემი ხატია სამშობლო,
სახატე მთელი ქვეყანა,
განათებული მთა-ბარი,
წილნაცარია ღმერთთანა.
თავისუფლება დღეს ჩვენი
მომავალს უძღერს დიდებას,
ცისკრის ვარსკვლავი ამოდის
და ორ ზღვას შუა ბრწყინდება,
დიდება თავისუფლებას,
თავისუფლებას დიდება.



მოუსმინეთ ჰიმნს

ლეკსი დავით მარჩაბისა
მუსიკა ზაქარია ფალაშვილისა
ჰიმნად დაამუშავა იოსებ კეჭემაძემ

სარჩევი

თავი I. სიმრავლე. რაციონალური რიცხვები.	7
როგორ ვითარდებოდა ალგებრა	8
1. წინა კლასში შესწავლილი მასალის გამეორება	10
1. წილადები და მათზე მოქმედებები	10
2. ათწილადები და მათზე მოქმედებები.	12
3. ჩვეულებრივი წილადის გადაქცევა ათწილადად	15
4. რიცხვითი გამოსახულება. ასოითი გამოსახულება.	18
5. ამოცანები წილადებზე.	20
2. სიმრავლე.	22
3. სიმრავლეთა თანაკვეთა და გაერთიანება	28
4. უარყოფითი რიცხვები	33
5. რაციონალური რიცხვების შედარება	38
6. რიცხვის მოდული	42
7. რაციონალური რიცხვების შეკრება	47
8. რაციონალური რიცხვების გამოკლება	53
9. რაციონალური რიცხვების გამრავლება-გაყოფა	57
10. არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებები რაციონალური რიცხვებისთვის.	62
I თავის დამატებითი სავარჯიშოები	68
I თავის მოკლე მიმოხილვა	74
თავი II. გეომეტრიული ფიგურები. წრფეთა ურთიერთმდებარეობა. კუთხე . . .	75
1. გეომეტრიული ფიგურები.	76
2. წრფეების ურთიერთმდებარეობა	81
3. მონაკვეთი	86
4. კუთხე.	91
5. კუთხის ბისექტრისა.	97
6. მოსაზღვრე კუთხეები.	100
7. ვერტიკალური კუთხეები	104
8. კუთხე ორ წრფეს შორის	107
9. წრფეთა პარალელობის ნიშნები	110
10. პარალელურ წრფეთა თვისებები	114
II თავის დამატებითი სავარჯიშოები	117
II თავის მოკლე მიმოხილვა.	122
თავი III. პროცენტი. პროპორცია. განტოლება.	123
1. პროცენტი	124
2. რიცხვის პოვნა მისი პროცენტის მიხედვით	130
3. ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდება	134
4. ამოცანები პროცენტებზე.	138
5. პირდაპირპროპორციული სიდიდეები	144

6. რიცხვის დაყოფა მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად	149
7. უკუპროპორციული დამოკიდებულება	153
ეს საინტერესოა: ოქროს კვეთა	159
8. განტოლება.	161
9. განტოლების ამოხსნა	165
10. ამოცანების ამოხსნა განტოლების მეშვეობით	171
III თავის დამატებითი სავარჯიშოები.	180
III თავის მოკლე მიმოხილვა	186
თავი IV. სამკუთხედი.	187
1. სამკუთხედი	188
2. სამკუთხედების კლასიფიკაცია	191
3. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი.	196
4. სამკუთხედის გარე კუთხე	200
5. სამკუთხედის მედიანა	203
6. სამკუთხედის ბისექტრისა	206
7. სამკუთხედის სიმაღლე	208
IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები.	212
IV თავის მოკლე მიმოხილვა	215
I-IV თავების სავარჯიშოთა პასუხები.	217
I-IV თავების საგნობრივი საძიებელი.	222
წიგნში გამოყენებული მათემატიკური ნიშნების ცხრილი	223

სახელმძღვანელოში გამოყენებული პირობითი ნიშნები

ნიგნზე მუშაობა რომ გაგიადვილდეთ, გთავაზობთ გაეცნოთ ნიგნის აგებულებას. პარაგრაფებში გხვდებათ შემდეგი რუბრიკები და პირობითი ნიშნები:

 მიზანი:	რას ისწავლით ამ პარაგრაფში;
 პრობლემური ამოცანა	ამოცანის ამოხსნა დაგეხმარებათ განსახილველი თემის გაგებაში;
 წყვილებში სამუშაო	დავალება, რომელსაც შეასრულებთ თანაკლასელთან ერთად, მასწავლებლის ხელმძღვანელობით, რის შემდეგაც უფრო კრიტიკულად შეაფასებთ თქვენი და თქვენი კლასელების მიერ მიღებულ ცოდნას;
 კითხვები	კითხვები, რომლებზეც პასუხის გაცემა დაგეხმარებათ მიღებული ცოდნის განმტკიცებაში;
 კვლევითი დავალება	მოიცავს ინდივიდუალურ აქტივობებს, რომლებიც ხელს უწყობს კვლევითი, კრიტიკული აზროვნებისა და დასკვნის გამოტანის უნარების განვითარებას;
 სავარჯიშოები	დავალება, რომელსაც სახლში დამოუკიდებლად შეასრულებთ ნასწავლი მასალის განსამტკიცებლად;
 გამეორება	
 იცოდით, რომ	გაგაცნობთ მათემატიკასთან დაკავშირებულ საინტერესო ფაქტებს, რომლებიც ამ საგნისადმი თქვენს ინტერესს გააღრმავებს;
 ეს საინტერესოა	
 გეომეტრია ცხოვრებაში	წარმოგიდგენთ ფაქტებს, რომლებშიც გეომეტრია ბუნებრივად, ან ადამიანის ხელშეწყობით დიდ როლს ასრულებს;
 რას შეძლებთ:	შეიცავს რა ცოდნა და უნარები შეიძინეთ პარაგრაფის შესწავლის შედეგად;
 მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის	შეგახსენებთ ისეთ აქტივობებს, რომლებიც შემდეგი თემის უკეთ გაგებაში დაგეხმარებათ;

ა.პ.თ. – შემოკლებული აღნიშვნაა და იკითხება ასე: „ამოცანის პირობის თანახმად“.

რ.დ.გ. – შემოკლებული აღნიშვნაა და იკითხება ასე: „რისი დამტკიცებაც გვსურდა“.

გისურვებთ წარმატებებს!



მათხოვრები

თავი I

სიმრავლე. რაციონალური რიცხვები



შეისწავლით:

- სიმრავლეს და მის ელემენტებს;
- მოქმედებებს სიმრავლეებზე;
- უარყოფით რიცხვებს;
- რიცხვის მოდულს;
- რაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებებს;
- ფრჩხილების გახსნას რიცხვითი გამოსახულების გამარტივებისას.

შეძლებთ:

- მოცემული სიმრავლის ქვესიმრავლის, სიმრავლეთა გაერთიანების და თანაკვეთის პოვნას;
- რაციონალური რიცხვების შედარებას;
- ამოცანების ამოხსნისას მოდულის თვისებების გამოყენებას;
- რაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებების შესრულებას.

„მათემატიკა არის ენა, რომელზედაც ბუნება გვესაუბრება. ვინც ამ ენას არ ფლობს, მისთვის სამყაროს საიდუმლოებანი დახშული დარჩება.“

ნიკო მუსხელიშვილი (1891-1976)

გამოჩენილი ქართველი მათემატიკოსი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის პირველი პრეზიდენტი, აკადემიკოსი

ძვირფასო მეშვიდეკლასელებო!



**მუჰამად ბენ მუსა
ალ-ხვარაზმი**
(დაახლ. 780-850)
სპარსი მათემატიკოსი,
ასტრონომი და გეოგრაფი



გვერდი მუჰამად ალ-ხვარაზმის
წიგნიდან „კიტაბ ალ-ჯებრ
ალ-მუკაბალა“ (IX ს.)

თქვენ იწყებთ მათემატიკის მნიშვნელოვანი დარგების – ალგებრისა და გეომეტრიის – შესწავლას. ალგებრა არითმეტიკული ამოცანების ამოხსნის ზოგადი მეთოდების ძიების შედეგად აღმოცენდა. ალგებრის მეთოდები ითვალისწინებს განტოლებათა შედგენასა და ამოხსნას. არითმეტიკული ამოცანებისადმი ალგებრული მიდგომის ნიშნები გვხვდება ჯერ კიდევ ძველ ეგვიპტურ პაპირუსში, რომელიც ძვ.წ. 2000-1700 წლებშია დაწერილი ვინმე აჰმესის მიერ. ამ პაპირუსში მოყვანილი ამოცანებიდან ჩანს, რომ ეგვიპტელებმა იცოდნენ ანგარიში, იცოდნენ წილადები და პირველი და მეორე ხარისხის განტოლებების ამოხსნა.

ალგებრული იდეებისა და სიმბოლიკის განვითარებაზე მნიშვნელოვანი გავლენა მოახდინა დიოფანტეს „არითმეტიკამ“ (III ს. ჩვ. ერამდე). სიტყვა ალგებრა წარმოიშვა ხორეზმელი მათემატიკოსისა და ასტრონომის, **მუჰამად ბენ მუსა ალ-ხვარაზმის**, ტრაქტატის „კიტაბ ალ-ჯაბრ ალ-მუკაბალა“ გამოჩენის შემდეგ. მის თხზულებაში დანვრილებითაა გადმოცემული იმდროინდელი ალგებრული ცოდნა. მოცემულია პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი განტოლების ამოხსნის ზოგადი წესი, რომლის მიხედვით, თუ განტოლებაში არის უარყოფითი (გამოსაკლები) რიცხვები, ისინი უნდა დაემატოს განტოლების ორივე ნაწილს, მაშინ განტოლების ყველა წევრი დადებითი იქნება. შემდეგ კი განტოლების ორივე ნაწილს ტოლი წევრები აკლდება, რის შედეგადაც განტოლება მარტივდება.

ამოხსნათ განტოლება „ალ-ჯებრ“-ის მიხედვით:

$$9x - 15 = 7x - 5$$

განტოლების ორივე ნაწილს მივუმატოთ ჯერ 5, შემდეგ კი 15.
მივიღებთ: $9x + 5 = 7x + 15$.

განტოლების ორივე ნაწილს გამოვაკლოთ ჯერ 5, შემდეგ $7x$,
მივიღებთ: $2x = 10$, აქედან $x = 5$.

ალ-ხვარაზმის ნიგნს, როგორც სახელმძღვანელოს, განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მათემატიკის ისტორიაში. სწორედ მისი გავლენით ალგებრა გაფორმდა, როგორც მეცნიერება განტოლების ამოხსნის შესახებ.

სიტყვა „ალგებრა“ აღებულია ამ თხზულების სათაურიდან „ალ-ჯებრ“. იმ პერიოდში ჯერ კიდევ არ იყო შეკრებისა და გამოკლების ნიშნები, ტოლობის ნიშანი და ა.შ. ამიტომ ალ-ხვარაზმი ყველა წესს მთლიანად სიტყვებით აყალიბებდა. შეკრებისა და გამოკლების დროს „პლუს“ და „მინუს“ სიტყვების ნაცვლად, შემოკლების მიზნით, „პ“-ს და „მ“-ს წერდა. ეს გრძელდებოდა XVI საუკუნემდე.

ამ პერიოდის გერმანულ ალგებრაისტა შრომებში უკვე ვხვდებით „+“ და „-“ ნიშნებს, ცოტა მოგვიანებით „×“ ნიშანს. გაყოფის „:“ ნიშანი კი XVII საუკუნეში შემოიღეს.

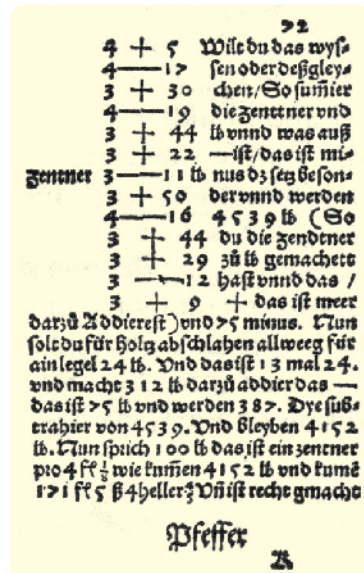
XVII ს-ის შუა წლებში სავსებით ჩამოყალიბდა ალგებრის სიმბოლიკა, რომლის შემქმნელიც იყო ფრანგი მათემატიკოსი ფ. ვიეტი.

ფორმულათა ენამ განაპირობა მათემატიკის სწრაფი განვითარება.

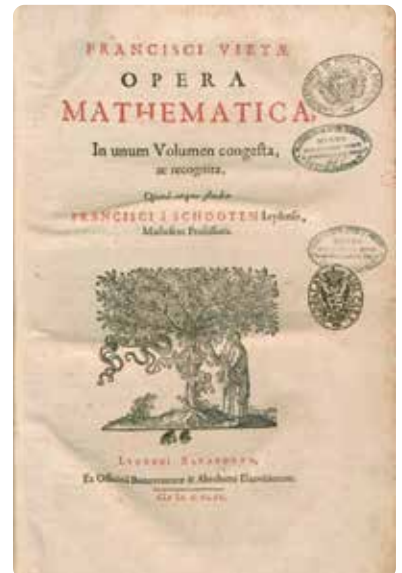


ფრანსუა ვიეტი
(1540-1603)

ფრანგი მათემატიკოსი,
თანამედროვე ალგებრის
ერთ-ერთი ფუძემდებელი.



მათემატიკური ნიშნების, პლუსისა (+) და მინუსის (-) პირველი გამოჩენა ბეჭდურ წიგნში. ფრაგმენტი იოჰანეს ვიდმანის სახელმძღვანელოდან „კომერციული არითმეტიკა“, ლაიფციგი, 1489 წ.



ფრანსუა ვიეტის მათემატიკური ნაშრომების პირველი სრული კრებული — "Opera Mathematica", რომელიც გამოიცა 1646 წელს ქალაქ ლეიდეში (ჰოლანდია)

1. წინა კლასში შესწავლილი მასალის გამეორება



მიზანი:

- გავიხსენოთ წილადები და მათზე მოქმედებები;
- გავიხსენოთ რიცხვითი გამოსახულება და მისი გამარტივება;
- გავიხსენოთ რიცხვის ნაწილი.

1. წილადები და მათზე მოქმედებები

 გავიხსენოთ:

წილადს, რომლის მრიცხველი ნაკლებია მნიშვნელზე, **წესიერი წილადი** ეწოდება.

წილადს, რომლის მრიცხველი მეტია მნიშვნელზე, ან მისი ტოლია, **არაწესიერი წილადი** ეწოდება.

1. წილადის ძირითადი თვისება: თუ წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ, ან გავყოფთ ერთსა და იმავე ნულის არატოლ რიცხვზე, მივიღებთ მოცემულის ტოლ წილადს.

$$\text{მაგალითად: } \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28}; \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$$

2. წილადების გასაერთმნიშვნელიანებად საჭიროა:

- ა) ვიპოვოთ მოცემული წილადების მნიშვნელების უმცირესი საერთო ჯერადი, რომელიც ამ წილადების უმცირესი საერთო მნიშვნელი იქნება.
- ბ) ვიპოვოთ თითოეული წილადის დამატებითი მამრავლი, რისთვისაც საერთო მნიშვნელი უნდა გავყოთ მოცემული წილადების მნიშვნელებზე.
- გ) თითოეული წილადის მნიშვნელი და მრიცხველი გავამრავლოთ მის დამატებით მამრავლზე.

შევკრიბოთ სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადები:

$$\begin{aligned} \frac{7}{8} + \frac{5}{6} &= & | & \text{გავაერთმნიშვნელიანოთ, უ.ს.ჯ. (8;6)=24} \\ &= \frac{21}{24} + \frac{20}{24} = & | & \text{შევკრიბოთ ტოლმნიშვნელიანი წილადები} \\ &= \frac{21+20}{24} = \frac{41}{24} = 1 \frac{17}{24} \end{aligned}$$

3. შერეული წილადები რომ შევკრიბოთ, საჭიროა ცალ-ცალკე შევკრიბოთ მათი მთელი და წილადი ნაწილები.

$$\text{მაგალითად: } 2\frac{5}{7} + 1\frac{2}{5} = 3\frac{25+14}{35} = 3\frac{39}{35} = 4\frac{4}{35};$$

4. შერეული წილადები რომ გამოვავლოთ, საჭიროა ცალ-ცალკე გამოვავლოთ მათი მთელი და წილადი ნაწილები. თუ მაკლების წილადი ნაწილი მეტია საკლების წილად ნაწილზე, მაშინ საკლების ერთი ერთეული უნდა გადავაქციოთ არანესიერ წილადად.

$$\text{მაგალითად: } 4\frac{2}{9} - 2\frac{7}{15} = 2\frac{10-21}{45} = 1\frac{45+10-21}{45} = 1\frac{34}{45}.$$

5. წილადები რომ გავამრავლოთ, მათი მრიცხველების ნამრავლი უნდა დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელების ნამრავლი — მნიშვნელად.

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$$

$$\text{მაგალითად: ა) } \frac{8}{9} \cdot \frac{27}{32} = \frac{8 \cdot 27}{9 \cdot 32} = \frac{3}{4}; \quad \text{ბ) } \frac{3}{50} \cdot 10 = \frac{3 \cdot 10}{50} = \frac{3}{5}.$$

6. წილადი რომ წილადზე გავყოთ, საჭიროა გასაყოფი გავამრავლოთ გამყოფის შებრუნებულ წილადზე.

7. შერეული წილადები რომ გავამრავლოთ (გავყოთ), საჭიროა ისინი ჯერ გადავაქციოთ არანესიერ წილადებად, შემდეგ კი გავამრავლოთ (გავყოთ).

$$\begin{aligned} \text{მაგალითად:} \\ \text{ა) } 5\frac{1}{7} \cdot 2\frac{2}{27} &= \frac{36}{7} \cdot \frac{56}{27} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}; \\ \text{ბ) } 5\frac{3}{11} : 2\frac{10}{11} &= \frac{58}{11} \cdot \frac{11}{32} = \frac{29}{16}. \end{aligned}$$



სავარჯიშოები

- $\frac{5}{6}$ ჩანერეთ წილადად, რომლის მნიშვნელია:
ა) 12; ბ) 18; გ) 24; დ) 96.
- ჩამოთვლილთაგან, რომელია $\frac{2}{7}$ -ის ტოლი წილადი?
ა) $\frac{4}{28}$; ბ) $\frac{16}{63}$; გ) $\frac{14}{49}$; დ) $\frac{18}{21}$.
- ჩანერეთ არანესიერი წილადის სახით:
ა) $3\frac{1}{2}$; ბ) $2\frac{2}{3}$; გ) $1\frac{5}{9}$; დ) $2\frac{8}{11}$.
- ჩანერეთ შერეული წილადის სახით:
ა) $\frac{13}{2}$; ბ) $\frac{26}{7}$; გ) $\frac{55}{12}$; დ) $\frac{100}{9}$.
- შეადარეთ წილადები:
ა) $\frac{3}{5}$ და $\frac{2}{5}$; ბ) $\frac{2}{9}$ და $\frac{2}{11}$; გ) $\frac{3}{9}$ და $\frac{7}{9}$; დ) $\frac{99}{100}$ და $\frac{199}{200}$.

6. გამოიანგარიშეთ:

ა) $\frac{3}{5} + \frac{4}{9}$; ბ) $3\frac{5}{12} + 1\frac{7}{9}$; გ) $12\frac{8}{15} + 9\frac{11}{20}$; დ) $2\frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{17}$.
ე) $1\frac{10}{21} : 5\frac{1}{6}$; ვ) $8 - 4\frac{17}{18}$; ზ) $8\frac{4}{5} - 2\frac{3}{8}$; თ) $4 : 3\frac{1}{5}$.

7. გამოთვალეთ ყველა იმ წესიერი წილადის ჯამი, რომელთა მნიშვნელი ერთნიშნა მარტივი რიცხვია.

8. სკოლის სპორტულმა კლუბმა ორდღიანი ველოტური დაგეგმა. პირველ დღეს მონაწილეებმა $20\frac{3}{8}$ კმ გაიარეს, მეორე დღეს კი $-\frac{2}{8}$ კმ-ით მეტი. რამდენი კილომეტრი გაიარეს მონაწილეებმა ორ დღეში სულ?



9. ერთ ცისტერნაში $3\frac{4}{5}$ ტ საწვავია, მეორეში $-4\frac{2}{3}$ ტ. რამდენი ტონით მეტი საწვავია მეორე ცისტერნაში პირველთან შედარებით?

2. ათწილადები და მათზე მოქმედებები

 გავიხსენოთ:

წილადები, რომელთა მნიშვნელია 10; 100; 1000 ... შესაძლებელია ჩაიწეროს მნიშვნელის გარეშე — **ათწილადის** სახით.

მაგალითად: $\frac{1}{10} = 0,1$; $\frac{4}{10} = 0,4$; $\frac{7}{100} = 0,07$; $2\frac{3}{1000} = 2,003$.

თუ ათწილადს მარჯვნივ მივუწეროთ ნებისმიერი რაოდენობის ნულს, მიიღება მოცემულის **ტოლი ათწილადი**.

მაგალითად: $0,07 = 0,07000\dots$; $5,3000\dots = 5,3$.

ორი ათწილადი რომ შევკრიბოთ, საჭიროა:

- ა) ერთი ათწილადი მეორეს ისე მივუწეროთ ქვეშ, რომ ერთსახელა თანრიგები ზუსტად ერთმანეთის ქვეშ აღმოჩნდეს (შესაბამისად, მძიმე აღმოჩნდება მძიმის ქვეშ);
- ბ) მიღებული რიცხვები შევკრიბოთ ისე, როგორც ნატურალური რიცხვები;
- გ) მიღებულ ჯამში მძიმე დავსვათ შესაკრებთა მძიმეების ქვეშ.

ათწილადების გამოკლებისას საჭიროა:

- ა) საკლებს მაკლები ქვეშ ისე მივუწეროთ, რომ ერთსახელა თანრიგები ერთმანეთის ქვეშ აღმოჩნდეს (შესაბამისად, მძიმე აღმოჩნდება მძიმის ქვეშ);
- ბ) გამოკლება შევასრულოთ ნატურალური რიცხვების გამოკლების მსგავსად;
- გ) მიღებულ სხვაობაში მძიმე დავწეროთ საკლებისა და მაკლების მძიმეების ქვეშ.

მაგალითები: ა)	$\begin{array}{r} 37,441 \\ + 1,870 \\ \hline 39,311 \end{array}$	ბ)	$\begin{array}{r} 24,190 \\ - 8,213 \\ \hline 15,977 \end{array}$
----------------	---	----	---

ორი ათწილადი რომ გავამრავლოთ, საჭიროა:

- ა) გავამრავლოთ ისინი, როგორც ნატურალური რიცხვები (ე.ი. მძიმეებს ყურადღება არ მივაქციოთ);
- ბ) მიღებულ ნამრავლში მძიმით გამოვყოთ მარჯვნიდან იმდენი ათწილადი ნიშანი, რამდენი ათწილადი ნიშანიცაა ორივე თანამამრავლში ერთად.

მაგალითად: $7,05 \cdot 0,3 = 2,115$.

ათწილადი რომ 10-ზე, 100-ზე, 1000-ზე და ა.შ. გავამრავლოთ, საჭიროა მძიმე გადავიტანოთ შესაბამისად 1, 2, 3 და ა.შ. ციფრით მარჯვნივ. ათწილადი რომ 10-ზე, 100-ზე, 1000-ზე და ა.შ. გავყოთ, მძიმე უნდა გადავიტანოთ ერთი, ორი, სამი და ა.შ. ციფრით მარცხნივ.

მაგალითები: $18,235 \cdot 100 = 1823,5$; $18,23 : 1000 = 0,01823$.

ათწილადი რომ ათწილადზე გავყოთ, საჭიროა გასაყოფსა და გამყოფში მძიმე გადავიტანოთ მარჯვნივ იმდენი ციფრით, რამდენი ციფრიცაა მძიმის შემდეგ გამყოფში, შემდეგ კი შევასრულოთ გაყოფა ნატურალურ რიცხვზე.

მაგალითი: $0,312 : 0,06 = 31,2 : 6 = 5,2$	$\begin{array}{r} 31,2 \overline{)6} \\ \underline{30} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$
---	--

ჩვეულებრივი წილადი რომ ათწილადის სახით ჩავწეროთ, წილადის მრიცხველი უნდა გავყოთ მნიშვნელზე.

მაგალითად: $\frac{3}{8} = 0,375$.

ათნილადი რომ ჩვეულებრივი წილადის სახით ჩავწერთ, მძიმე წავშალოთ და მიღებული რიცხვი დავწერთ მრიცხველში, ხოლო მნიშვნელში დანეროთ რიცხვი გამოსახული 1-ით და მარჯვნივ მიწერილი იმდენი ნულით, რამდენი ათნილადი ნიშანიც იყო ათნილადში.

$$\text{მაგალითად: } 3,035 = \frac{3035}{1000} = \frac{607}{200} = 3\frac{7}{200},$$

$$\text{ან ასეც } 3,035 = 3\frac{35}{1000} = 3\frac{7}{200}.$$



სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ:

- ა) $23,27 \cdot 10$; ბ) $123,27 \cdot 100$; გ) $13,827 \cdot 1\,000$; დ) $2,67 \cdot 100\,000$.
 ე) $27,57 : 10$; ვ) $156,745 : 100$; ზ) $19,083 : 1\,000$; თ) $30,002 : 100\,000$.

2. შეასრულეთ მოქმედებები:

- ა) $3,28 + 2,63$; ბ) $12,263 + 0,036$; გ) $12,89 - 3,24$; დ) $28,99 - 8,99$;
 ე) $3,2 \cdot 2,1$; ვ) $1,7 \cdot 4,64$; ზ) $7,245 : 2,1$; თ) $24,32 : 6,4$.

3. გამოთვალეთ:

- ა) $12\frac{3}{4} - 2,4 + 1,09$; ბ) $3,24 \cdot 2,5 - 1\frac{1}{10}$;
 გ) $(3\frac{1}{20} - 2,65) \cdot 4 + \frac{2}{5}$; დ) $4,37 : 0,5 - 0,3$.



ეს საინტერესოა

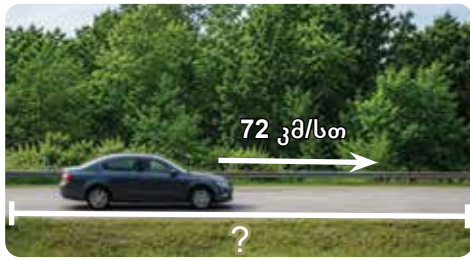


ჯონ ნეპერი (1550-1617)
 შოტლანდიელი მათემატიკოსი,
 ფიზიკოსი, ასტრონომი და
 ასტროლოგი.

ათნილადების შესახებ პირველი ინფორმაცია გვხვდება ჯერ კიდევ ძველ ბერძნულ მათემატიკურ ტრაქტატებში. თუმცა ათნილადების სრულყოფილი აღწერა მოგვცა სამარყანდელმა მათემატიკოსმა ჯემშიდ ალ-კაშიმ (1427 წ.). ევროპაში კი ათნილადები ფართოდ გავრცელდა ჰოლანდიელი ინჟინრის, სიმონ სტევენის, წიგნის „მეათე“ (1585) გამოსვლის შემდეგ.

ალ-კაშიმ შემოგვთავაზა ათნილადის ჩანაწერი, სადაც მთელი და წილადი ნაწილები ერთ სტრიქონში იწერებოდა. თუმცა მთელი და წილადი ნაწილების გამოსაყოფად იგი არ იყენებდა მძიმეს: მთელ ნაწილს წერდა შავი მელნით, ხოლო წილად ნაწილს – წითელი მელნით, ან გამოყოფდა ვერტიკალური ხაზით, მაგალითად: $3|25$.

ათნილადში მძიმე, როგორც მთელისა და წილადის გამყოფი ნიშანი, შემოიღეს იტალიელმა ასტრონომმა მეჯინიმ (1529 წ.) და ჯონ ნეპერმა (1617 წ.).



4. ავტომობილი მოძრაობს 72 კმ/სთ სიჩქარით. რა მანძილს გაივლის ის 0,5 სთ-ში? 5 წთ-ში? 1 წმ-ში?

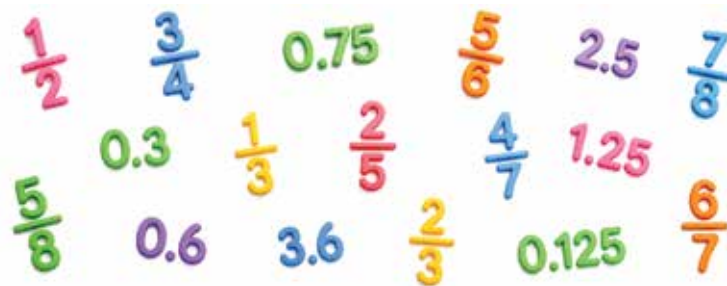
5. ერთი მილით აუზი ივსება 4 სთ-ში, მეორე მილით – 5 სთ-ში. რა დროში აივსება აუზის 0,9 ნაწილი, თუ ორივე მილს ერთდროულად გავხსნით?

თუ აუზი ივსება 3 სთ-ში, მაშინ 1 სთ-ში აივსება მისი $\frac{1}{3}$ ნაწილი



6. გიორგის და დათოს ერთად 240 ლ და 75 თეთრი აქვთ. რა თანხა აქვს თითოეულს, თუ დათოს გიორგისთან შედარებით 10 ლ და 35 თეთრით მეტი აქვს?

3. ჩვეულებრივი წილადის გადაქცევა ათწილადად



- მოცემული რიცხვებიდან: 20; 6; 50; 21; 64; 125, ამოარჩიეთ ისეთები, რომელთა მარტივ მამრავლებად დაშლა შეიცავს მხოლოდ 2-იანს ან 5-იანს.
- წილადები: $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{2}{21}$; $\frac{9}{25}$; $\frac{5}{6}$ ჩაწერეთ 10-ის, 100-ის, 1000-ის, მნიშვნელობის წილადების სახით (თუკი ეს შესაძლებელია). დააკვირდით მიღებულ შედეგებს და სცადეთ გამოიტანოთ დასკვნა, როგორი უკვეცი წილადის ჩაწერა შესაძლებელი 10-ის, 100-ის, 1000-ის, მნიშვნელობის წილადის სახით?

თქვენ უკვე იცით, რომ თუ უკვეც წილადს ჩავწერთ მოცემულისგან განსხვავებულ მნიშვნელიან წილადად, ახალი წილადის მნიშვნელი გაიყოფა მოცემული წილადის მნიშვნელზე. ამიტომ, ისეთი წილადების ჩაწერა იქნება შესაძლებელი 10-ის, 100-ის, 1000-ის, მნიშვნელიან წილადებად, რომელთა მნიშვნელი არის 10-ის, 100-ის, 1000-ის, ... გამყოფი. 10-ის, 100-ის, 1000-ის, ... მარტივი გამყოფები კი არის მხოლოდ 2 და 5:

$$10=2 \cdot 5, \quad 100=2^2 \cdot 5^2, \quad 1000=2^3 \cdot 5^3. \quad \text{და ა.შ.}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$$

12 იყოფა 2-ზე

$$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$$

24 იყოფა 4-ზე

$$\text{ე.ი. } \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} = 0,6;$$

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 0,35;$$

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0,12;$$

$$\text{ხოლო } \frac{5}{6} = \frac{5}{2 \cdot 3}; \quad \frac{2}{21} = \frac{2}{3 \cdot 7} - \text{არ ჩაიწერება ათწილადის სახით.}$$

ამრიგად, შეგვიძლია დავასკვნათ:

უკვეც წილადი $\frac{a}{b}$ მხოლოდ იმ შემთხვევაში გადაიქცევა ათწილადად, თუ ამ წილადის მნიშვნელი მარტივ მამრავლებად დაშლისას არ შეიცავს 2-ისა და 5-ისგან განსხვავებულ მარტივ მამრავლს.

ჩავწეროთ ათწილადის სახით: $\frac{3}{40}$.

$40=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5=2^3 \cdot 5$, ე.ი. $\frac{3}{40}$ ჩაიწერება ათწილადის სახით:

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 10} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{75}{1000} = 0,075$$

ჩვეულებრივი წილადი რომ ათწილადად გადავაქციოთ, საჭიროა მრიცხველი გავყოთ მნიშვნელზე.

$$\text{მაგალითად: } \frac{9}{20} = 0,45$$

$$\begin{array}{r|l} 9,00... & 20 \\ \underline{0.} & 0,45 \\ \underline{90} & \\ \underline{80} & \\ \underline{100} & \\ \underline{100} & \\ \underline{0} & \end{array}$$



სავარჯიშოები

1. შეასრულეთ გაყოფა:

ა) $3 : 5$; ბ) $2 : 8$; გ) $12 : 16$; დ) $17 : 50$.

2. ჩაწერეთ ათწილადის სახით:

ა) $\frac{4}{25}$; ბ) $\frac{21}{125}$; გ) $\frac{3}{5}$; დ) $\frac{19}{20}$.



3. ცარიელი ქილა $0,75$ კგ-ს იწონის, თაფლით სავსე კი – $8\frac{3}{4}$ კგ-ს. რამდენი კილოგრამი თაფლია ქილაში?



4. ანა მათემატიკის მეცადინეობას $1\frac{1}{3}$ სთ-ს ანდომებს, ინგლისურს $0,75$ სთ-ს უთმობს, ხოლო ქართულს 50 წუთში მეცადინეობს. რა დროს ანდომებს ანა დავალებების შესრულებას?

ალბათ, შეგიძნევიათ, რომ ზოგ პროდუქტს აწერია:

„დამზადებულია გადამუშავებული მასალისგან“.

ასეთი მასალის მისაღებად ადამიანები ქალაქს, პლასტმასას, მუყაოს და სხვა ნივთებს ცალკე აგროვებენ, შემდეგ კი მათ ხელახლა ამუშავებენ.

5. ეკო-კლუბმა სამ დღეში გადასამუშავებელი მასალა შეაგროვა. პირველ დღეს შეაგროვეს $80\frac{1}{2}$ კგ მასალა. მეორე დღეს – $10\frac{1}{2}$ კგ-ით მეტი, ვიდრე პირველ დღეს, მესამე დღეს კი – $12,5$ კგ-ით ნაკლები, ვიდრე პირველ დღეს ერთად. რომელ დღეს შეგროვდა ყველაზე მეტი მასალა და სულ რამდენი კილოგრამი მასალა შეგროვდა სამ დღეში?

6. შეასრულეთ მოქმედებები:

ა) $3\frac{7}{8} + 2,625$;

ბ) $3,37 + \frac{7}{50} - 1,2$;

გ) $5\frac{23}{25} \cdot 2,5$;

დ) $\frac{13}{16} \cdot 3,2 - 2,6$.

7. გამოიანგარიშეთ:

ა) $\frac{4 \cdot 12,5}{16,8 - 11,8}$;

ბ) $\frac{4,6 \cdot 2,5 - 1,5}{6,23 - 5,73}$;

გ) $\frac{3,78 \cdot 10 - 11,7}{2,61}$;

დ) $\frac{19,87 + 5,23}{30 - 49 : 10}$.

8. რა რიცხვი უნდა ეწეროს $\square$ -ის ნაცვლად, რომ მივიღოთ ჭეშმარიტი ტოლობა?

ა) $\square \cdot 2,6 = 10 - 0,64$;

ბ) $\square : 0,5 = 16,53 + 3,51$;

გ) $\square - 2,8 = 13,2 + 1,08$;

დ) $\square + 4,02 = 17,48 : 3,8$.

4. რიცხვითი გამოსახულება.

ასოითი გამოსახულება

ჩანანერს, რომელიც შედგება რიცხვებისგან, ფრჩხილებისგან და არითმეტიკულ მოქმედებათა ნიშნებისგან და რომლის მნიშვნელობის გამოთვლა შესაძლებელია, **რიცხვითი გამოსახულება** ეწოდება.

მაგალითად, $25 \cdot 2 - 75 : 3$ და $(17 + 23) \cdot 5 + 3 \cdot 11$ რიცხვითი გამოსახულებებია.

რიცხვით გამოსახულებაში მოცემული მოქმედებების შესრულების შედეგად მიიღება რიცხვი, რომელსაც **რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა** ეწოდება.

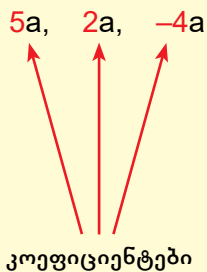
გამოსახულებას, რომელიც შეიცავს ასოებს, **ასოით გამოსახულებას** უწოდებენ.

მაგალითად, $a + 2(b - 7 \cdot 5,6)$ – ასოითი გამოსახულებაა.

ნებისმიერ რიცხვით გამოსახულებას ერთი გარკვეული მნიშვნელობა აქვს. ასოითი გამოსახულების მნიშვნელობა რომ ვიპოვოთ, გამოსახულებაში ჯერ ასოს ნაცვლად მისი წინასწარ მოცემული მნიშვნელობა ჩავსვათ, შემდეგ კი გამოვთვალოთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

მაგალითი 1.

ვიპოვოთ $5a + 2a - 4a + 4$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $a = 3,1$.



$$5a + 2a - 4a + 4 = \quad | \text{გამრავლების განრიგებადობის კანონი} \\ = a(5 + 2 - 4) + 4 = 3a + 4.$$

თუ $a = 3,1$, მაშინ გამოსახულების მნიშვნელობა იქნება $3 \cdot 3,1 + 4 = 13,3$.

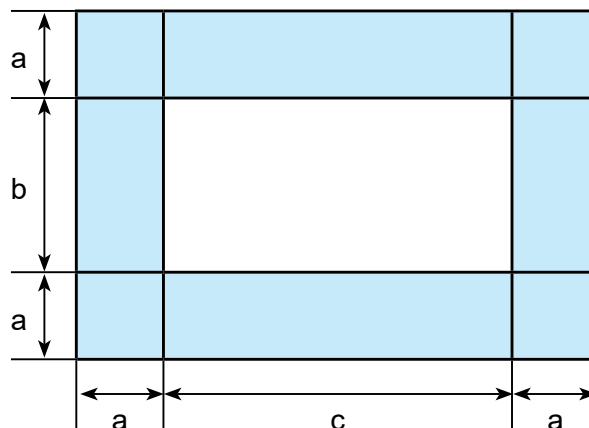
თუ დავაკვირდებით ჩვენ მიერ განხილულ გამოსახულებას $5a + 2a - 4a + 4$, ადვილად შეამჩნევთ, რომ პირველ სამ წევრს ერთი და იგივე ასოითი ნაწილი აქვს.

ასეთ წევრებს **მსგავს წევრებს** უწოდებენ, ხოლო თითოეული ასეთი წევრის რიცხვით თანამამრავლს – **კოეფიციენტს**.

მსგავსი წევრები რომ შევაერთოთ, საჭიროა შევკრიბოთ მათი კოეფიციენტები და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ საერთო ასოით ნაწილზე.



- იპოვეთ $2a + 1$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $a = 3; 1\frac{1}{2}; 0; 2,8$.
- იპოვეთ $a + 3b$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ:
 - $a = 2; b = 1;$
 - $a = 3; b = \frac{2}{3};$
 - $a = 2\frac{1}{9}; b = 0;$
 - $a = 13; b = 2,5.$
- შეადგინეთ ასოითი გამოსახულება:
 - a და b რიცხვების ჯამი შემცირებული 4-ჯერ;
 - a რიცხვისა და b რიცხვის გაორკეცვულის ჯამი;
 - a რიცხვის კვადრატისა და გასამკეცვული b რიცხვის სხვაობა;
 - a და b რიცხვების შებრუნებული რიცხვების ჯამი.
- შეაერთეთ მსგავსი წევრები:
 - $2a + 3a;$
 - $2b + 13b;$
 - $2,5x - 1,4x;$
 - $12\frac{7}{9}mn - 5\frac{7}{9}mn;$
 - $5,3a + b - 4a + 2b;$
 - $13x + 22,2y - 4x - 10y;$
 - $3,4m + 2,3n - m + 0,4n;$
 - $\frac{2}{7}mn + 9,7x + 4\frac{5}{7}mn - 5,3x.$
- თუ $k = 2,1$, მაშინ რომელი გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობაა მეტი და რამდენით?
 - $3k - 2$ თუ $k + 10;$
 - $2k + 1,5$ თუ $4k - 3\frac{2}{5}.$
- იპოვეთ $5a + b - 3a$ გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ:
 - $a = 4,3; b = 8,2;$
 - $a = 0,8; b = 7\frac{4}{5}.$
- შეადგინეთ ნახაზზე მოცემული ჩარჩოს ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება.



5. ამოცანები წილადებზე

გავიხსენოთ:

რიცხვის წილადი ნაწილი რომ ვიპოვოთ, საჭიროა ეს რიცხვი გავამრავლოთ ამ წილადზე.



ამოცანა 1: ფოტოაპარატის ფასი $\frac{2}{5}$ -ით შემცირდა. რა ღირს ახლა ფოტოაპარატი, თუ იგი გაიყვამდე 320 ლარი ღირდა?

ამოხსნა:

I გზა: ფოტოაპარატის ღირებულება შემცირდა:

$$320 \cdot \frac{2}{5} = 64 \cdot 2 = 128 \text{ (ლარი)}$$

ფოტოაპარატი ახლა ღირს $320 - 128 = 192$ (ლარი)

II გზა: ფოტოაპარატის ღირებულება ახლა არის თავდაპირველის $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ ნაწილი.

ფოტოაპარატი ახლა ღირს $320 \cdot \frac{3}{5} = 64 \cdot 3 = 192$ (ლარი)

პასუხი: 192 ლარი.

რომ ვიპოვოთ რიცხვი, როცა ცნობილია მისი წილადი ნაწილის მნიშვნელობა, საჭიროა ეს მნიშვნელობა გავყოთ ამ წილადზე.

ამოცანა 2: გიორგიმ წაიკითხა წიგნის 120 გვერდი, რაც ამ წიგნის გვერდების რაოდენობის $\frac{3}{5}$ -ია. რამდენი გვერდია წიგნში?

ამოხსნა: რადგან $\frac{3}{5}$ ნაწილი არის 120, ამიტომ წიგნში გვერდების რაოდენობა იქნება:

$$120 : \frac{3}{5} = 120 \cdot \frac{5}{3} = 200 \text{ (გვ.)}$$

პასუხი: 200 გვერდი.

ორი რიცხვის განაყოფს, $\frac{a}{b}$ -ს, ამ რიცხვების შეფარდებას უწოდებენ.

შეფარდება $\frac{a}{b}$ გვიჩვენებს, **a რიცხვი b რიცხვის რა ნაწილია.**

ამოცანა 3: კლასში 24 მოსწავლეა. მათგან 4 მოსწავლე დადის რაგბზე. მოსწავლეთა რა ნაწილი დადის რაგბზე?

ამოხსნა: იმისათვის, რომ გავიგოთ მოსწავლეთა რა ნაწილი დადის რაგბზე, იმ მოსწავლეთა რაოდენობა, რომლებიც რაგბზე დადიან უნდა შევაფარდოთ კლასის მოსწავლეთა საერთო რაოდენობასთან:

$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$



სავარჯიშოები

- იპოვეთ 240-ის:
 - $\frac{1}{2}$ ნაწილი;
 - $\frac{2}{3}$ ნაწილი;
 - $\frac{5}{12}$ ნაწილი;
 - $\frac{19}{24}$ ნაწილი.
- იპოვეთ რიცხვი, რომლის $\frac{3}{5}$ ნაწილი არის:
 - 12;
 - 24;
 - 3,12;
 - $\frac{2}{9}$.
- 150-ის რა ნაწილია:
 - 25;
 - 55;
 - 81;
 - 123?
- სკოლის 960 მოსწავლიდან $\frac{1}{30}$ დაინტერესებულია ჭადრაკით. რამდენი ბავშვია ჭადრაკით დაინტერესებული?
- 125 კონკურსანტიდან 75 გადავიდა შემდეგ ეტაპზე. კონკურსანტების რა ნაწილი გამოაკლდა ამ კონკურსს?
- სკოლის მზის პანელის განახლების შედეგად გამოიშვა ენერგია გაიზარდა 600 ერთეულით, რაც თავდაპირველი დღიური გამოიშვა ენერგიის მესამედია. დღეში რამდენ ერთეულ ენერგიას გამოიშვებდა პანელი განახლებამდე?
- თამარი 5 წამში 4 ნაბიჯს დგამს, მისი და ნინი კი – 7 წამში იმავე სიგრძის 6 ნაბიჯს. რომელი და დადის უფრო სწრაფად?
- ეკო-კლუბმა 210 კგ გადასამუშავებელი მასალა შეაგროვა. პირველ დღეს დაახარისხა მასალის $\frac{3}{7}$ ნაწილი, მეორე დღეს — დარჩენილი მასალის 0,75 ნაწილი. რომელ დღეს დაახარისხეს მეტი მასალა და რამდენით?
- გიორგიმ პირველ დღეს 175 გვერდიანი წიგნის 0,4 ნაწილი წაიკითხა, მეორე დღეს — წინა დღეს წაკითხულის $\frac{5}{7}$ ნაწილი. რამდენი გვერდი დარჩა გიორგის წასაკითხი?



- ოქროსა და ვერცხლის შენადნობის 0,24 ნაწილი ვერცხლია. რამდენი გრამით მეტი ოქროა 80 გრამ შენადნობში? რამდენი გრამი შენადნობი უნდა ავიღოთ, რომ მასში ოქრო 65 გრამით მეტი იყოს, ვიდრე ვერცხლი?

2. სიმრავლე



მიზანი:

- გავეცნოთ სიმრავლეს; სიმრავლის ელემენტებს; სიმრავლეთა ტოლობას; ქვესიმრავლეს.



იცოდით, რომ

კომპიუტერული პროგრამები მონაცემების დასალაგებლად ხშირად სიმრავლეებს იყენებენ.

1. რამდენ ასო-ნიშანს შეიცავს ქართული ანბანი;
2. დაასახელეთ ხუთი მობილური აპლიკაცია, რომელსაც ყოველდღიურად იყენებთ;
3. დაწერეთ 1-დან 40-მდე მოთავსებული ყველა მარტივი რიცხვი.

როგორ ფიქრობთ, რა საერთო აქვთ ამ ჩამონათვლებს?

დიახ, თითოეულ ჩამონათვალში გარკვეული ნიშნით გაერთიანებული ობიექტებია.

ცხოვრებაში ხშირად ვხვდებით ობიექტთა ერთობლიობებს, რომლებიც კონკრეტული ნიშნით არიან გაერთიანებულნი. ასეთ ერთობლიობებს, რა თქმა უნდა, თავიანთი სახელებიც აქვთ, მაგალითად, ფეხბურთელთა გუნდი, ცხვრის ფარა, ცხენების რემა და სხვ.

მათემატიკაში კი სხვადასხვა ობიექტების ერთობლიობის აღსანიშნავად იყენებენ ტერმინს – **სიმრავლე**, მაგალითად, ერთნიშნა რიცხვების სიმრავლე, 10-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე, წრფის წერტილთა სიმრავლე, თქვენი კლასის მოსწავლეთა სიმრავლე და სხვა.

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებელი, გერმანელი მათემატიკოსი, გეორგ კანტორი ამბობდა: „სიმრავლე არის ბევრი, რომელსაც ჩვენ ერთიანად გავიაზრებთ“.

მართლაც, როცა ვამბობთ: „მოცემულია ორნიშნა რიცხვების სიმრავლე“, ვგულისხმობთ არა რომელიმე კონკრეტულ რიცხვებს, არამედ ყველა ორნიშნა რიცხვს ერთად.

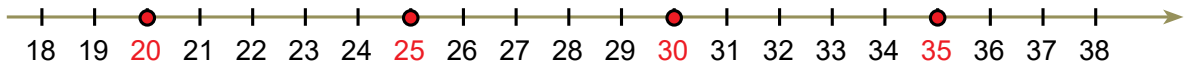
სიმრავლეს დიდი ლათინური ასოებით აღნიშნავენ, მაგალითად, A, B, C,



რემა, ფარა, კოლტი – მრავალს ანუ სიმრავლეს აღნიშნავს.

ობიექტებს, რომლებითაც შედგენილია სიმრავლე, სიმრავლის ელემენტები ეწოდება.

მაგალითად, 18-დან 38-მდე მოთავსებულ 5-ის ჯერად რიცხვთა სიმრავლის ელემენტებია: 20; 25; 30; 35.



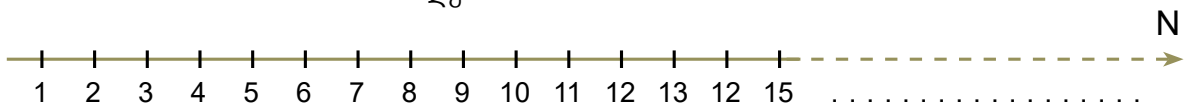
სიმრავლის ელემენტები პატარა ლათინური ასოებით აღინიშნება, მაგალითად, $a, b, c, \dots$.

ვთქვათ, A არის a, b და c ელემენტებისაგან შედგენილი სიმრავლე. ამ წინადადების მათემატიკური ჩანაწერი ასეთია: $A = \{a; b; c\}$. მაგალითად, ლუნ ერთნიშნა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ჩაინერება: $A = \{2; 4; 6; 8\}$.

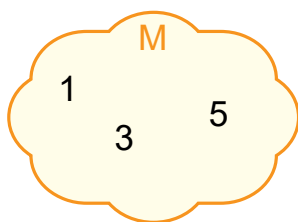
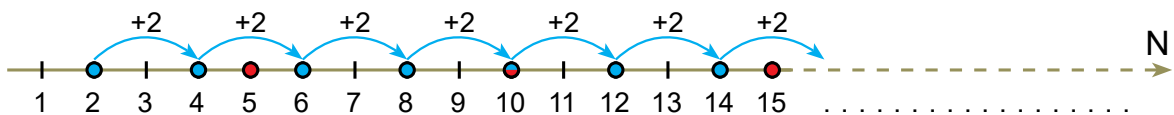
წინადადება „ a არ არის A სიმრავლის ელემენტი“ ინერება ასეც: $a \notin A$

იმის აღსანიშნავად, რომ a არის A სიმრავლის ელემენტი, წერენ $a \in A$ და იკითხება: „ a არის A სიმრავლის ელემენტი“. ხოლო $a \notin A$ იკითხება: „ a არ ეკუთვნის A სიმრავლეს“, ან „ a არ არის A სიმრავლის ელემენტი“.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს N ასოთი აღნიშნავენ, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. იგი შეიცავს ელემენტთა უსასრულო რაოდენობას.



უსასრულო რაოდენობის ელემენტებს შეიცავს, ასევე, ლუნ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე – $\{2, 4, 6, \dots\}$; 5-ის ჯერად ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე – $\{5, 10, 15, \dots\}$.

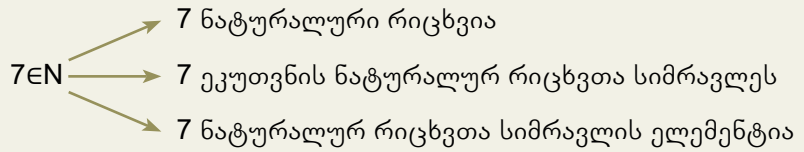


ასეთ სიმრავლეს **უსასრულო სიმრავლე** ეწოდება.

ხოლო, თუ სიმრავლე შეიცავს ელემენტთა სასრულო რაოდენობას, მას **სასრული სიმრავლე** ეწოდება, მაგალითად, $M = \{1; 3; 5\}$ სასრული სიმრავლეა.

შესაძლოა სიმრავლე არ შეიცავდეს არცერთ ელემენტს. ასეთ სიმრავლეს **ცარიელი სიმრავლე** ეწოდება და $\emptyset$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაგალითად, თქვენი თანაკლასელი ასტრონავტების სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა, ასევე ცარიელი სიმრავლეა 32-სა და 39-ს შორის მოთავსებული 10-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე, რადგან 32-სა და 39-ს შორის არცერთი რიცხვი 10-ზე არ იყოფა.

იმატყველე სწორად!



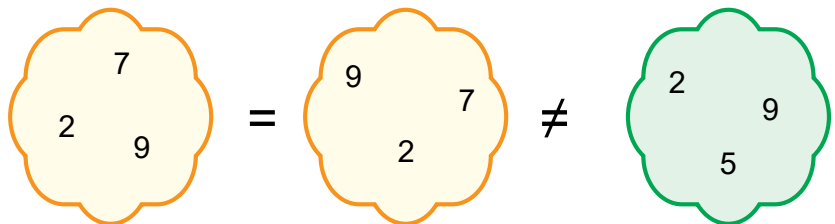
დანერეთ 1-დან 50-მდე:

- ა) 12-ის ჯერადი ყველა ორნიშნა რიცხვის სიმრავლე;
 - ბ) სიმრავლე ყველა იმ ორნიშნა რიცხვისა, რომლებიც იყოფა 3-ზეც და 4-ზეც;
 - გ) 6-ის ჯერადი ყველა ორნიშნა რიცხვის სიმრავლე.
- დააკვირდით მიღებული სიმრავლეების ელემენტებს, რა დასკვნას გამოიტანთ?

ვიტყვი, რომ **A** და **B** სიმრავლეები ტოლია და ჩავწერთ $A = B$, თუ ეს სიმრავლეები შედგება ერთი და იმავე ელემენტებისგან.

ყურადღება!

რიცხვი არ არის
 სიმრავლის ტოლი
 $7 \neq \{7\}$
 რიცხვი
 სიმრავლე, რომლის
 ელემენტია რიცხვი 7

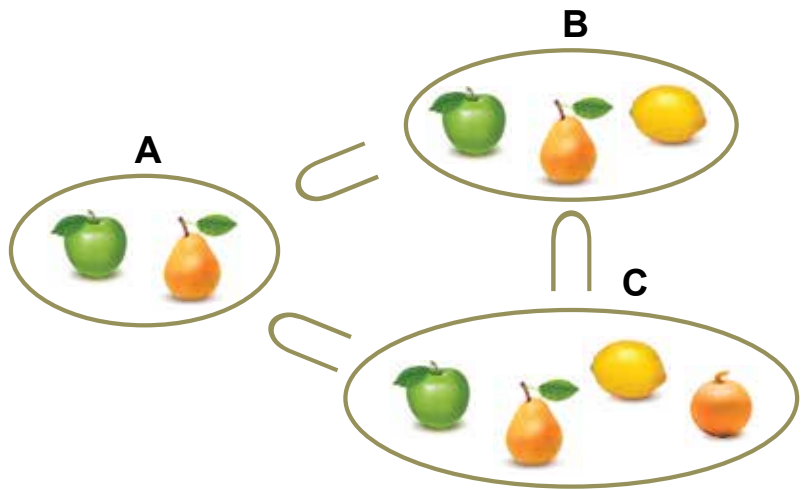


მაგალითად, $\{2, 7, 9\} = \{9, 2, 7\}$, ხოლო $\{2, 5, 9\} \neq \{2, 7, 9\}$.
 განვიხილოთ ორი სიმრავლე: $B = \{4, 5, 9, 15\}$ და $A = \{5, 15\}$.
 როგორც ვხედავთ, $5 \in B$ და $5 \in A$, ასევე $15 \in A$ და $15 \in B$, ე.ი.
A სიმრავლის ყოველი ელემენტი **B** სიმრავლის ელემენტიცაა.

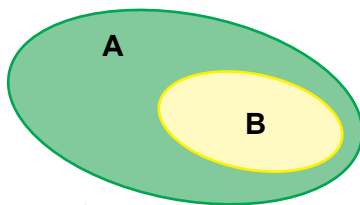
თუ **A** სიმრავლის ყოველი ელემენტი **B** სიმრავლის ელემენტიცაა, მაშინ **A** სიმრავლეს **B** სიმრავლის ქვესიმრავლე ეწოდება და წერენ $A \subset B$.

თუ **A** არ არის **B**-ს ქვესიმრავლე, იწერება: $A \not\subset B$.

მიღებულია, რომ ცარიელი სიმრავლე არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე: $\emptyset \subset A$.



თუ $A \subset B$ და $B \subset C$, მაშინ $A \subset C$.



ნახ. 1

სქემატურად სიმრავლე და მისი ქვესიმრავლე შესაძლებელია ასე გამოვსახოთ (ნახ. 1):

$$B \subset A$$

მაგალითი 1.

დანერეთ $M = \{5; 8; 9\}$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე.

ამოხსნა:

$\emptyset$ – ცარიელი სიმრავლე;

ერთელემენტიანი ქვესიმრავლეები: $\{5\}$, $\{8\}$, $\{9\}$;

ორელემენტიანი ქვესიმრავლეები: $\{5; 8\}$, $\{5; 9\}$, $\{8; 9\}$;

სამელემენტიანი ქვესიმრავლე: $\{5; 8; 9\}$.

ე.ი. M სიმრავლეს აქვს 8 ქვესიმრავლე.

$$A \subset A$$



- მოიყვანეთ:
 - სასრული, ბ) უსასრულო სიმრავლის მაგალითები.
- რას ეწოდება სიმრავლის ელემენტი?
- როგორი სიმრავლეა ცარიელი სიმრავლე?
- როგორ სიმრავლეებს ეწოდება ტოლი სიმრავლეები?
- როგორ სიმრავლეს ეწოდება მოცემული სიმრავლის ქვესიმრავლე?
- ჩანერეთ 2, 5, 6, 7, 10, 4 რიცხვებიდან რომელია $A = \{2; 3; 5; 5; 10; 20\}$ სიმრავლის ელემენტი და რომელი არ ეკუთვნის A სიმრავლეს.



1. ჩამოწერეთ:

- ა) 15-ის გამყოფების სიმრავლე;
- ბ) 24-ის გამყოფების სიმრავლე;
- გ) 20-ზე ნაკლები მარტივი რიცხვების სიმრავლე;
- დ) 23-ის ჯერადი ორნიშნა რიცხვების სიმრავლე.

2. ქვემარითა თუ არა:

- ა) $4 \in \{0; 1; 9; 2; 1; 3; 4\}$;
- ბ) $\{0; 1; 4\} \in \{0; 1; 6; 18; 20, 4\}$;
- გ) $N \subset \emptyset$;
- დ) თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ $A = B$;
- ე) $0 \in \emptyset$;
- ვ) $\frac{7}{9} \in N$.

3. შეადგინეთ ხუთელემენტური სიმრავლე, რომლის ელემენტებია:

- ა) საქართველოს ქალაქები;
- ბ) ქართველი მეფეები;
- გ) ქართველი მწერლები;
- დ) ქართული ხუროთმოძღვრული ტაძრები;
- ე) საქართველოს მდინარეები.



4. თუ $A = \{2; 5; 8; 16; 25; 46; 81\}$ და $B = \{1; 4; 5; 8; 19; 29; 55; 81\}$,

- ა) რამდენი ელემენტისგან შედგება თითოეული სიმრავლე;
- ბ) რამდენი საერთო ელემენტი აქვთ სიმრავლეებს?

5. რამდენი ორელემენტოვანი ქვესიმრავლე აქვს:

- ა) სამელემენტოვანი სიმრავლეს;
- ბ) ოთხელემენტოვანი სიმრავლეს?

6. A სიმრავლე წარმოადგენს:

- ა) 210-ის მარტივი გამყოფების სიმრავლეს.
- ბ) 256-ის მარტივი გამყოფების სიმრავლეს.

რამდენი ელემენტისგან შედგება A სიმრავლე?

7. შეადგინეთ იმ ორნიშნა რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც 14-ზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევს 13-ს. დაასახელეთ მიღებული სიმრავლის უდიდესი და უმცირესი ელემენტები.

8. ირაკლიმ $M = \{2; 5; 9; 50\}$ სიმრავლის ერთელემენტოვანი ქვესიმრავლეები ამოწერა, ბარბარემ – იმავე სიმრავლის სამელემენტოვანი ქვესიმრავლეები. რომელმა მოსწავლემ ამოწერა მეტი სიმრავლე?



კვლევითი დავალება

საძიებო სისტემაში მოიძიე მინიმუმ ათი სატრანსპორტო საშუალება და დააჯგუფე ისინი შენს მიერ შერჩეული ნიშნით (მაგალითად, დანიშნულება, გადაადგილების კატეგორია და ა.შ.). იმსჯელე, როგორ იცვლება სიმრავლეები კლასიფიკაციის ნიშნის შეცვლით.



გამეორება

9. არსებობს თუ არა რიცხვი, რომლის ციფრთა ნამრავლია 264?

10. ამოხსენი განტოლება:

- ა) $x + 2,4 = 6,1$;
- ბ) $x - \frac{3}{5} = 1\frac{1}{2}$;
- გ) $x \cdot 1,3 = 91$;
- დ) $7,77 : x = 3,7$.



რას შეძლებთ:

- მოიყვანოთ სასრული, უსასრულო, ცარიელი სიმრავლის მაგალითები;
- ამოიცნოთ ტოლი სიმრავლეები;
- დაასახელოთ და ჩაწეროთ მოცემული სიმრავლის ელემენტები;
- იპოვოთ მოცემული სიმრავლის ქვესიმრავლე;
- მოცემულ სიმრავლესა და მის ქვესიმრავლეს შორის დამოკიდებულება გამოსახოთ ეილერ-ვენის დიაგრამებით.

3. სიმრავლეთა თანაკვეთა და გაერთიანება



მიზანი:

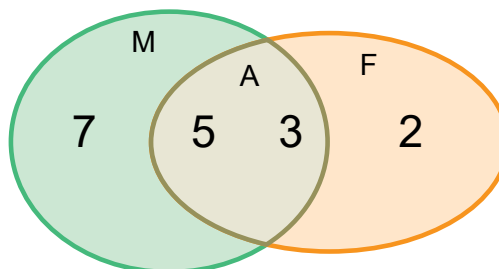
- შევისწავლოთ სიმრავლეთა თანაკვეთა; სიმრავლეთა გაერთიანება.



VII^ა კლასის 25 მოსწავლიდან 18 მოსწავლე სპორტითაა დაკავებული, 15 კი – მუსიკით. რამდენი მოსწავლე დადის სპორტზეც და მუსიკაზეც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ კლასის თითოეული მოსწავლე ამ ორი წრიდან ერთზე მაინც დადის?

განვიხილოთ ორი სიმრავლე $M = \{5; 3; 7\}$ და $F = \{5; 2; 3\}$. ვხედავთ, რომ $5 \in M$ და $5 \in F$, ასევე $3 \in M$ და $3 \in F$, ე.ი. რიცხვები 3 და 5 არიან როგორც M , ასევე F სიმრავლის ელემენტები. $A = \{3; 5\}$ სიმრავლეს M და F სიმრავლეთა თანაკვეთას უწოდებენ, რაც ასე იწერება:

$$M \cap F = A.$$



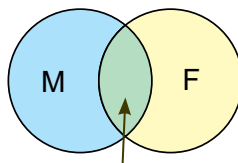
- იპოვეთ A და B სიმრავლეთა თანაკვეთა, თუ
- $A = \{8; 2, 3; 7; 15\}$ და $B = \{7; 11; 2, 3; 25\}$;
 - $A = \{5; 18; 11\}$ და $B = \{1; 13; 17\}$;
 - $A = \emptyset$ და $B = \{2; 4; 8\}$.

თანაკვეთა – „ $\cap$ “
გაერთიანება – „ $\cup$ “

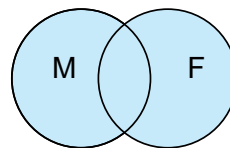


იცოდით, რომ

ინტერნეტში საძიებო სისტემები ხშირად სწორედ სიმრავლეთა თანაკვეთისა და გაერთიანების პრინციპით პოულობენ სასურველ ინფორმაციას.



$M \cap F$



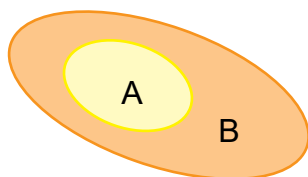
$M \cup F$

ნახ. 1

მაგალითი 1.

აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი A და B სიმრავლისათვის, თუ $A \subset B$ (ნახ. 2), სრულდება: ა) $A \cap B = A$ და ბ) $B = A \cup B$.

ამოხსნა:



ნახ. 2

ა) რადგან $A \subset B$ ე.ი. A სიმრავლის ყოველი ელემენტი არის B სიმრავლის ელემენტიც, ამიტომ მათ საერთო ელემენტი, გარდა A სიმრავლის ელემენტებისა, არ ექნებათ. აქედან, მათი საერთო ელემენტებისაგან შედგენილი სიმრავლე იქნება A სიმრავლე. ამრიგად, $A \cap B = A$.

ბ) თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ მოცემულ მსჯელობას, $A \cup B$ სიმრავლეში B სიმრავლის ელემენტების გარდა სხვა ელემენტები არ შევა, ე.ი. $A \cup B = B$.



ეს საინტერესოა



ლეონარდ ეილერი
(1707-1783)

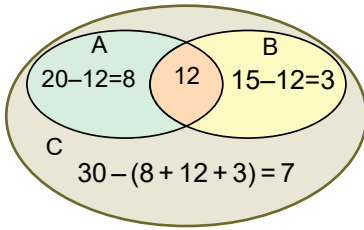
დიდი შვეიცარიელი
მათემატიკოსი

ლეონარდ ეილერი ამოცანების ამოხსნისას ხშირად სარგებლობდა მსგავსი ნახატებით (ნახ. 1, 2). მის პატივსაცემად ასეთ წრეებს ეილერის წრეები უწოდეს.

ამოცანების ამოხსნის გრაფიკულმა მეთოდმა განსაკუთრებული გამოყენება პოვა ინგლისელი მათემატიკოსის (ლოგიკოსის), ჯონ ვენის (1843-1923), შრომებში. მან დახვეწა და განავითარა ეს მეთოდი, ამიტომ ამ დიაგრამებს ზოგჯერ ეილერ-ვენის დიაგრამებსაც უწოდებენ.

მაგალითი 2.

30 ტურისტიდან 20-მა ტურისტმა იცის ინგლისური, 15-მა – გერმანული, ხოლო 12 ტურისტი ლაპარაკობს როგორც ინგლისურად, ასევე გერმანულად. რამდენმა ტურისტმა არ იცის არც ინგლისური და არც გერმანული?



ამოხსნა:

A ასოთი აღვნიშნოთ იმ ტურისტთა სიმრავლე, რომლებიც საუბრობენ ინგლისურად, B-თი კი – იმ ტურისტთა სიმრავლე, რომლებიც საუბრობენ გერმანულად. დავხაზოთ ეილერ-ვენის დიაგრამა.

რადგან ინგლისურად და გერმანულად საუბრობს 12 ტურისტი, ამიტომ მხოლოდ ინგლისური იცის $20 - 12 = 8$ ტურისტმა, ხოლო მხოლოდ გერმანული – $15 - 12 = 3$ ტურისტმა. ე.ი. არც გერმანული და არც ინგლისური არ იცის $30 - (8 + 12 + 3) = 7$ ტურისტმა.

იმატყველე სწორად!

$a \in A \cup B$ – a ეკუთვნის A და B სიმრავლეთა გაერთიანებას.

$a \in A \cap B$ – a არის A და B სიმრავლეთა თანაკვეთის ელემენტი.



1. რას ეწოდება ორი სიმრავლის გაერთიანება? თანაკვეთა?
2. რა შემთხვევაში იქნება ორი სიმრავლის თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლე?
3. რა შემთხვევაში შესრულდება ტოლობა:
 - ა) $M \cup F = F$;
 - ბ) $M \cap K = M$?



სავარჯიშოები

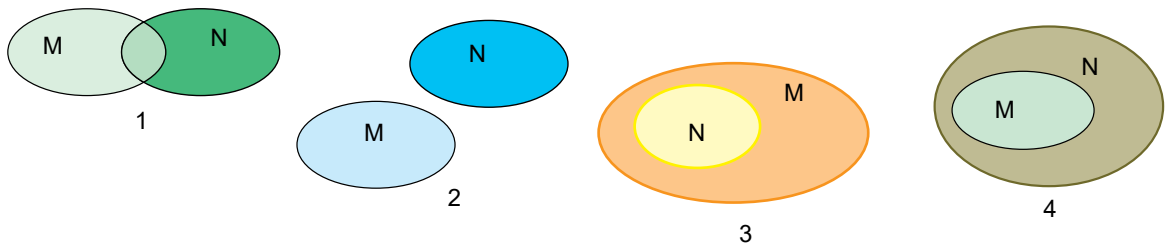
1. მოცემულია ორი სიმრავლე $A = \{0; 2; 7; 19\}$ და $B = \{0; 4; 8; 19; 21; 40\}$. იპოვეთ:
 - ა) $A \cup B$;
 - ბ) $A \cap B$.
2. თუ $A = \{3; 5,3; 5\frac{3}{7}; 20\}$; $B = \{0; \frac{38}{7}; 198\}$ და $C = \{0; 5,3; 20; 198\}$, მაშინ იპოვეთ:
 - ა) $A \cap B$;
 - ბ) $A \cup C$;
 - გ) $(A \cap B) \cap C$;
 - დ) $(B \cup C) \cup A$.
3. ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელია სასრული და რომელი უსასრულო?
 - ა) სამნიშნა რიცხვების სიმრავლე;
 - ბ) 1024-ის გამყოფთა სიმრავლე;
 - გ) 11-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე;
 - დ) მარტივ რიცხვთა სიმრავლე.



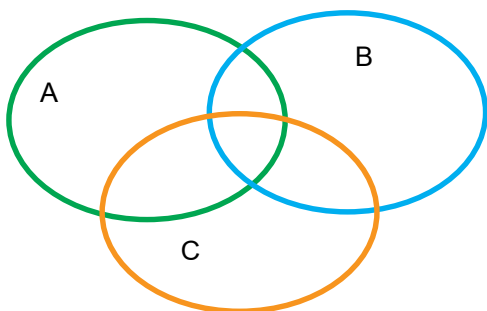
კვლევითი დავალება

გამოკითხე კლასელები, ვინ დადის ფეხბურთზე, ვინ ქართულ ხალხურ ცეკვებზე. შეადგინე შესაბამისი სიმრავლეები და მონაცემები წარმოადგინე ვენის დიაგრამის სახით. გააკეთე დასკვნა რამდენი მოსწავლე ეკუთვნის თითოეულ ჯგუფს.

4. M სიმრავლე არის 6-ის ჯერადი ორნიშნა რიცხვების სიმრავლე, N სიმრავლე კი – 200-ზე ნაკლები 4-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე. აღწერეთ $M \cap N$ სიმრავლე და დაასახელეთ მიღებული სიმრავლის უმცირესი ელემენტი.
5. მოცემულია $A = \{0,9; 2,2; 3\frac{1}{3}; 35\}$ და $B = \{\frac{9}{10}; 2\frac{1}{5}; 3,3\}$. ჩამოთვლილთაგან რომელია ჭეშმარიტი და რომელი მცდარი წინადადება?
 - ა) $0,9 \in A \cap B$;
 - ბ) $2,2 \notin A \cap B$;
 - გ) $\{3,3; 35\} \subset A \cup B$;
 - დ) $A \cap B = A$;
 - ე) $A \cup B = A$;
 - ვ) $A \cup B$ სიმრავლე ექვსი ელემენტისგან შედგება.
6. $\square$ -ის ნაცვლად ჩასვით $\in, \notin, \subset$ ან $\not\subset$ ნიშანი ისე, რომ მივიღოთ ჭეშმარიტი წინადადება:
 - ა) $\emptyset \square \{1; 26\}$;
 - ბ) $3 \square \{2; 4; 6\}$;
 - გ) $\{0; 2\} \square N$;
 - დ) $12 \square \{5; 12; 24; 200\}$;
 - ე) $2 \square \emptyset$;
 - ვ) $\{5\} \square \{3; 5; 11\}$;
 - ზ) $\frac{4}{5} \square \{0,8\}$;
 - თ) $\{13; 22; 19\} \square \{22; 19\}$.
7. შეუსაბამეთ შესაბამისი დიაგრამა:
 - ა) M წარმოადგენს ლუნ რიცხვთა სიმრავლეს, N – კენტ რიცხვთა სიმრავლეს;
 - ბ) M არის მათემატიკოსთა სიმრავლე, N – ქართველ მათემატიკოსთა სიმრავლე;
 - გ) M არის მარტივ რიცხვთა სიმრავლე, N – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;
 - დ) M არის 4-ის ჯერად რიცხვთა სიმრავლე, N – 6-ის ჯერად რიცხვთა სიმრავლე.



8. კლასში 25 მოსწავლიდან ფრანგულ და გერმანულ ენებს ერთდროულად 8 მოსწავლე სწავლობს, ფრანგულ ენას – 18. რამდენი მოსწავლე სწავლობს გერმანულ ენას, თუ ვიცით, რომ თითოეული მოსწავლე ამ ორი ენიდან ერთს მაინც სწავლობს?
9. ა) მაქსიმუმ, ბ) მინიმუმ რამდენ ელემენტია შუიძლება იყოს სამედიკინური და ხუთედიკინური სიმრავლეების გაერთიანება?



10. გადაიხაზეთ რვეულში დიაგრამა და დაშტრი-
ნეთ შესაბამისი სიმრავლე:
- ა) $A \cap B \cap C$; ბ) $(A \cup B) \cap C$;
გ) $A \cup B \cup C$; დ) $A \cap (B \cup C)$.

11. მცხეთაში იმყოფება 80-კაციანი ტურისტული ჯგუფი. მათგან 58 ტურისტი ინგლისურენოვანია, 44 – რუსულენოვანი. რამდენი ტურისტი ფლობს ორივე ენას, თუ მხოლოდ 2-მა ტურისტმა არ იცის არც ინგლისური და არც რუსული ენა?
12. სკოლის STEM-ფესტივალზე 320 მოსწავლე დარეგისტრირდა. თითოეულმა მოსწავლემ აირჩია რობოტიკის აქტივობის სივრცე ან სამეცნიერო ექსპერიმენტების აქტივობის სივრცე, ზოგმა კი – ორივე. მხოლოდ რობოტიკის სივრცე აირჩია 120 მოსწავლემ, მხოლოდ სამეცნიერო ექსპერიმენტების სივრცე – 94-მა. რამდენმა მოსწავლემ აირჩია ორივე სივრცე? რამდენმა მოსწავლემ აირჩია რობოტიკის სივრცე? რამდენმა – სამეცნიერო ექსპერიმენტების სივრცე?
13. კლასიდან 23-მა მოსწავლემ მიიღო მონაწილეობა მათემატიკის ოლიმპიადაზე, 18-მა – ინგლისურის, ხოლო 12-მა – ინფორმატიკის. მაქსიმუმ რამდენი მოსწავლე შეიძლება გასულიყო სამივე ოლიმპიადაზე?



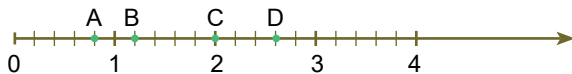
გამეორება

14. ამოხსენით განტოლება:
 ა) $2(x-2,6)-1=3$; ბ) $3(x-3,5)-2x=20:2,5$.
15. კენტი ან თუ ლუნი ქვემოთ მოცემული რიცხვი, თუ ცნობილია, რომ a კენტი რიცხვია?
 ა) $3a+1$; ბ) $8a-4$;
 გ) $4a+3$; დ) $7a+6$.



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. იპოვეთ A, B, C და D წერტილთა კოორდინატები:



2. წრეზე მონიშნეთ O წერტილი და A, B, C, K წერტილები ისე, რომ:

- ა) A წერტილი იყოს O წერტილის მარჯვნივ 2 უჯრით;
 ბ) B წერტილი იყოს O წერტილის მარჯვნივ 4 უჯრით;
 გ) C წერტილი იყოს O წერტილის მარცხნივ 5 უჯრით;
 დ) K წერტილი იყოს O წერტილის მარცხნივ 3 უჯრით.



რას შეძლებთ:

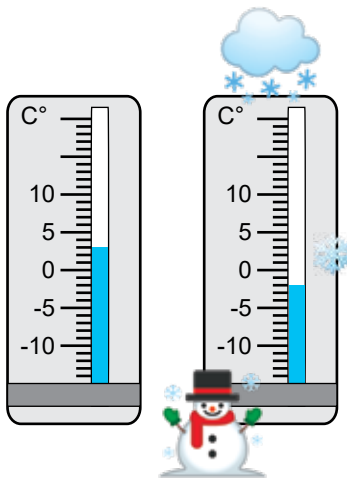
- ორი სიმრავლის გაერთიანებისა და თანაკვეთის პოვნას;
- სხვადასხვა სიტუაციურ ამოცანებში დაინახოთ სიმრავლეები და მათი თანაკვეთისა თუ გაერთიანების პოვნა შეძლოთ ეილერ-ვენის დიაგრამების საშუალებით.

4. უარყოფითი რიცხვები



მიზანი:

- შევისწავლოთ უარყოფითი და დადებითი რიცხვების განსაზღვრა;
- შევისწავლოთ რაციონალური რიცხვების გამოსახვა რიცხვით ლერძზე;
- შევისწავლოთ წერტილის კოორდინატის პოვნა.



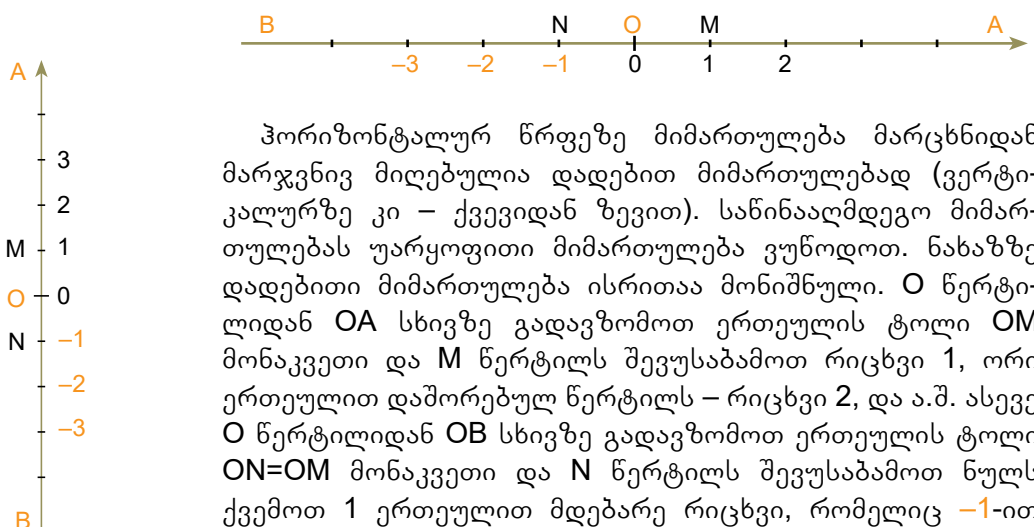
1. 2025 წლის 25 დეკემბერს თერმომეტრი 3°C -ს აჩვენებდა. მომდევნო დღეს კი ტემპერატურამ დაინია ა) 2°C -ით, ბ) 5°C -ით. რამდენ გრადუსს აჩვენებდა თერმომეტრი 26 დეკემბერს?

2. მკვდარი ზღვა (ისრაელში) ზღვის დონიდან 425 მ-ით ქვემოთ მდებარეობს. ზღვის დონე 0-ოვან დონედაა მიღებული.

მოიფიქრეთ სხვა მაგალითები, რომლებშიც გამოყენებული იქნება რიცხვები 0-ს ქვემოთ.

როგორც ხედავთ, საჭიროა ახალი რიცხვების შემოღება, კერძოდ, „რიცხვები 0-ს ქვემოთ“. როგორც ნატურალური რიცხვები, ასევე ახალი რიცხვები – „რიცხვები ნულს ქვემოთ“ შესაძლებელია წრფის წერტილებით გამოვსახოთ.

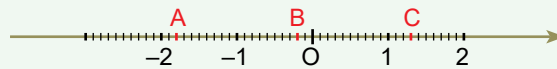
ავიღოთ წრფეზე რაიმე O წერტილი, იგი მივიჩნიოთ ათვლის სათავედ და შევუსაბამოთ რიცხვი 0. O წერტილით წრფე ორ ურთიერთსაწინააღმდეგოდ მიმართულ OA და OB სხივად გაიყო.



$$2 = +2$$

აღვნიშნოთ, ორი ერთეულით დაშორებულ წერტილს – რიცხვი -2 , და ა.შ. რიცხვებს, რომელთა შესაბამისი წერტილები დადებით სხივზე მდებარეობენ, **დადებითი რიცხვები** ეწოდებათ და აღინიშნებიან ასე: „ $+1$ “ (პლუს ერთი), „ $+2$ “ (პლუს ორი), „ $+3$ “ (პლუს სამი), ..., ხოლო უარყოფით სხივზე მდებარე წერტილთა შესაბამის რიცხვებს – **უარყოფითი რიცხვები** და აღინიშნებიან „ -1 “ (მინუს ერთი), „ -2 “ (მინუს ორი), „ -3 “ (მინუს სამი), რიცხვი ნული არც დადებითია და არც უარყოფითი. დადებითი რიცხვის წინ „ $+$ “ ნიშნის დანერგა აუცილებელი არ არის.

1. დაწერეთ ნახაზზე მოცემულ წრფეზე ლათინური ასოებით მონიშნულის წერტილების შესაბამისი რიცხვები.



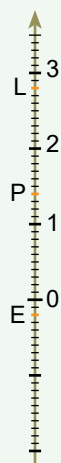
2. აღწერეთ, როგორ ვიპოვოთ წრფეზე შემდეგი წერტილები: $3\frac{1}{2}$; $2,3$; $-1,6$. შეასრულეთ შესაბამისი ნახაზი.

აღბათ, ხვდებით, რომ ამ წრფეზე შესაძლებელია ნებისმიერი რიცხვისთვის მოიძებნოს შესაბამისი წერტილი. ასეთ წრფეს **რიცხვითი ღერძი** ეწოდება.

წრფეს, რომელზეც შერჩეულია ათვლის სათავე, ერთეულოვანი მონაკვეთი და დადებითი მიმართულება, რიცხვითი ღერძი ეწოდება.

რიცხვს, რომელსაც რიცხვითი ღერძის მოცემული წერტილი შეესაბამება, ამ **წერტილის კოორდინატი** ეწოდება.

A წერტილის კოორდინატი არის **a** რიცხვი, აღინიშნება ასე: **A(a)**.



ნახ. ბ.



ნახ. ა.

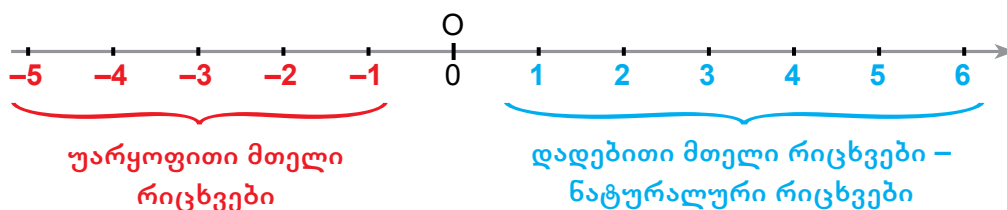
განვიხილოთ ნახ. ა.

K წერტილის კოორდინატია -4 , იწერება: **K(-4)**;

F წერტილის კოორდინატია $-2,3$, იწერება: **F($-2,3$)**.

შეეცადეთ, მოცემულ ნახაზებზე იპოვოთ A, M, L, E, P წერტილთა კოორდინატები.

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... რიცხვებს მთელი რიცხვები ეწოდება. მთელ რიცხვთა სიმრავლეს **Z** ასოთი აღნიშნავენ.

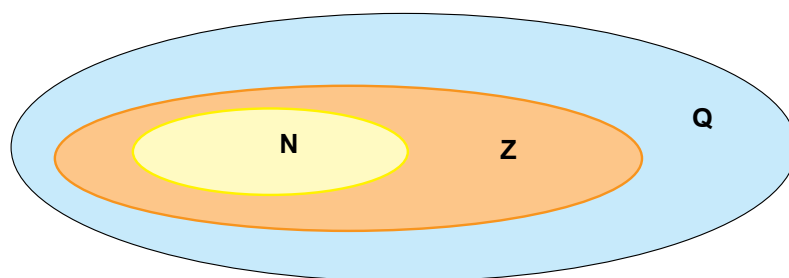


იცოდით, რომ

ძველ ჩინეთში (ჯერ კიდევ ძვ.წ. II საუკუნეში) გამოთვლების დროს დადებით რიცხვებს წითელი ჩხირებით გამოსახავდნენ, უარყოფითს კი - შავით. შავი ფერი ვალს ან ნაკლებობას (დანაკლისს) ასახავდა.

დადებითი და უარყოფითი რიცხვები, როგორც მთელი, ასევე წილადი და „0“, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს ქმნის. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება **Q** ასოთი.

$$5 \in \mathbb{Z}, 5 \in \mathbb{Q}, -7 \in \mathbb{Z}, 3,7 \in \mathbb{Q}.$$



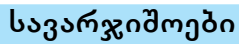
$$N \subset Z, Z \subset Q$$

იმატყველე სწორად!

$-2 \in \mathbb{Z}$ - მინუს 2 მთელი რიცხვია, ან მინუს ორი ეკუთვნის მთელ რიცხვთა სიმრავლეს.



1. როგორ წრფეს ეწოდება რიცხვითი ღერძი?
2. როგორ გესმით: A წერტილის კოორდინატი არის: +6; -2; -5; 7; 10?
3. როგორ აღინიშნება
 - ა) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე? ბ) მთელ რიცხვთა სიმრავლე?
4. როგორ რიცხვებს ეწოდება
 - ა) დადებითი? ბ) უარყოფითი?
5. ჩანერეთ
 - ა) -2 რაციონალური რიცხვია; ბ) -7 არ არის ნატურალური რიცხვი.



- 
- A close-up photograph of a snail with a brown, spiraled shell and a light-colored body, moving upwards on a dark, textured tree trunk. The background is a soft-focus green forest.

- ა) მინუს ორი; ბ) მინუს თხუთმეტი;
გ) ხუთი მთელი სამი მეათედი; დ) მინუს ორი მესამედი;
ე) ორმოცდაცამეტი; ვ) მინუს ორი მთელი შვიდი მეცხრედი.

- ა) A ნერტილი მდებარეობდეს O ნერტილიდან 3 უჯრით მარჯვნივ;
ბ) B ნერტილი მდებარეობდეს O ნერტილიდან 7 უჯრით მარცხნივ;
გ) C ნერტილი მდებარეობდეს B და O ნერტილებს შორის;
დ) D ნერტილი მდებარეობდეს B ნერტილიდან 2 უჯრით მარცხნივ;
ე) E ნერტილი მდებარეობდეს B და D ნერტილების შუაში;
ვ) F ნერტილი მდებარეობდეს E ნერტილიდან 12 უჯრით მარჯვნივ.

ა) ბანკში ნინოს ანგარიშზე 200 ლარი აქვს, სანდროს კი 150 ლარი აქვს;
ბ) თბილისში ყველაზე დაბალი ტემპერატურა -23°C , ხოლო ყველაზე მაღალი 42°C -ია დაფიქსირებული;
გ) კასპიის ზღვის ზედაპირი ზღვის დონიდან -28 მ-ზეა, ხოლო ტაბანყურის ტბა -1989 მ-ზე.

- а) $M(2)$; б) $N(-3)$; г) $P(-\frac{1}{2})$;
 в) $Q(2\frac{3}{4})$; д) $R(-\frac{7}{2})$.

- g)  A number line is shown with tick marks at -2, -1, 0, 1, and 2. Point A is marked at -1.5 and point B is marked at -0.5.



7. ბაკურიანში თერმომეტრი 3°C -ს აჩვენებდა. ამის შემდეგ ტემპერატურა დაეცა 5°C -ით, შემდეგ მოიმატა 3°C -ით და შემდეგ ისევ დაიკლო 5°C -ით. რას აჩვენებს ახლა თერმომეტრი?

გამოცდები

8. ჩამოთვლილთაგან რომელია ჭეშმარიტი?
 ა) $3 \in \mathbb{N}$; ბ) $-3 \in \mathbb{Q}$; გ) $-2,88 \notin \mathbb{Z}$; დ) $\frac{3}{7} \in \mathbb{Z}$;
 ე) $0 \in \mathbb{N}$; ვ) $-1 \in \mathbb{Z}$; ზ) $-3\frac{5}{19} \in \mathbb{Q}$; თ) $\frac{15}{3} \notin \mathbb{N}$.
9. იპოვეთ ორი რიცხვის სხვაობა, თუ იგი 12,5-ით ნაკლებია საკლებზე და 3,2-ით მეტია მაკლებზე.

კვლევითი დავალება

12-სართულიან შენობაში მე-5 სართული მიიჩნეოდა ნულოვან დონედ. მის ზემოთ მდებარე სართულები დანომრეთ დადებითი რიცხვებით, მის ქვემოთ მდებარე სართულები – უარყოფითი რიცხვებით. დაფიქრით, რა შეიცვლება, თუ ნულოვან დონედ მე-8 სართულს მიიჩნევთ? შეიცვლება თუ არა სართულებს შორის მანძილი?

მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. შეადარეთ რიცხვები:
 ა) $\frac{5}{8}$ და $\frac{17}{24}$; ბ) $\frac{3}{7}$ და $\frac{5}{11}$; გ) 0,08 და 0,29.
2. რიცხვით ღერძზე აიღეთ $M(2\frac{1}{2})$ ნერტილი და მისგან მარჯვნივ და მარცხნივ 3 ერთეულით დაშორებული A და B ნერტილები.
 ა) იპოვეთ A და B ნერტილთა კოორდინატები;
 ბ) შეადარეთ ერთმანეთს A, B და M ნერტილთა კოორდინატები.

რას შეძლებთ:

- დადებითი და უარყოფითი რიცხვების ნაკითხვას და ჩანერას;
- რიცხვითი ღერძის აგებას და მასზე დადებითი და უარყოფითი რიცხვების გამოსახვას. რიცხვით ღერძზე ნერტილის კოორდინატის პოვნას;
- ამოიცნოთ მთელი რიცხვი, წილადი რიცხვი, მთელი დადებითი რიცხვი, მთელი უარყოფითი რიცხვი, რაციონალური რიცხვი;
- რიცხვითი ღერძის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნას.

5. რაციონალური რიცხვების შედარება



მიზანი:

- შევედლოთ რაციონალური რიცხვების შედარება.



ტიბერიადის ტბა
(გალილეის ზღვა) ისრაელში.
ხედი კოსმოსიდან.

ქვემოთ მოცემულია ზოგიერთი ადგილი დედამიწაზე, რომელთა სიმაღლე ზღვის დონეზე ქვემოთ მდებარეობს:

კასპიის ზღვა — -27 მ;

ქ. ბაქო — -28 მ;

ასალის ტბა (ჯიბუტის რესპუბლიკა, აფრიკა) — -155 მ;

ქ. ახალი ორლეანი (აშშ) — -2 მ;

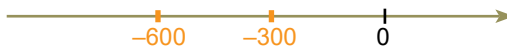
მკვდარი ზღვა (ისრაელის საზღვარზე) — -425 მ;

გალილეის ტბა (ისრაელი) — -210 მ.

დახაზეთ საკოორდინატო ღერძი და მასზე მონიშნეთ მითითებულ გეოგრაფიულ ადგილთა სიმაღლეები, ჩანერეთ ჩამოთვლილთაგან, რომელია ყველაზე ა) დაბალი, ბ) მაღალი ადგილი.

ჩვენ უკვე ვიცით, თუ a და b დადებითი რიცხვებია და $a > b$, მაშინ რიცხვით სხივზე $A(a)$ წერტილი მდებარეობს უფრო მარჯვნივ, ვიდრე $B(b)$ წერტილი, მაგრამ როგორ შევადაროთ უარყოფითი რიცხვები? განვიხილოთ ასეთი ამოცანა:

მარტში ფირმის ზარალი („უარყოფითი მოგება“) 300 ლარს შეადგენდა. აპრილში კი მისი ზარალი უკვე 600 ლარი იყო. რადგან ფირმისთვის უფრო წამგებიანი აპრილი აღმოჩნდა, ე.ი. $-600 < -300$.



იცოდით, რომ

მეცნიერები ანტარქტიდისა და გრენლანდიის მყინვარების სისქესა და ტემპერატურას ერთმანეთს ადარებენ, რათა კლიმატის ცვლილება შეისწავლონ.

2 იანვარს მესტიაში ტემპერატურა -13° იყო, ქუთაისში კი -2° . სად უფრო ციოდა? რა თქმა უნდა, მესტიაში, იქ ტემპერატურა უფრო დაბალი იყო. ე.ი. $-13 < -2$.



შეგვიძლია დავასკვნათ,

ორი რაციონალური რიცხვიდან მეტია ის რიცხვი, რომლის შესაბამისი წერტილი რიცხვით ღერძზე უფრო მარჯვნივ მდებარეობს.



თუ რიცხვით ღერძზე $A(a)$ წერტილი უფრო მარცხნივ მდებარეობს, ვიდრე $B(b)$ წერტილი, მაშინ ვწერთ $a < b$, ან $b > a$.

- a დადებითი რიცხვია, ე.ი. $a > 0$;
- a უარყოფითი რიცხვია, ე.ი. $a < 0$;
- a არაუარყოფითი რიცხვია, ე.ი. $a \geq 0$;
- a არადადებითი რიცხვია, ე.ი. $a \leq 0$.

ნებისმიერი დადებითი რიცხვი მეტია ნებისმიერ უარყოფით რიცხვზე.

დადებითი რიცხვები O წერტილის მარჯვნივ მდებარეობს – დადებითი რიცხვები მეტია 0 -ზე;
 უარყოფითი რიცხვები O წერტილის მარცხნივ მდებარეობს – უარყოფითი რიცხვები 0 -ზე ნაკლებია.

იმატყველე სწორად!

$-3 < 0$ — მინუს სამი უარყოფითი რიცხვია, ან მინუს სამი ნაკლებია ნულზე.



1. როგორ იწერება:
 - ა) x დადებითი რიცხვია; ბ) x არადადებითი რიცხვია.
2. როგორ არიან განლაგებული რიცხვით ღერძზე $A(a)$ და $B(b)$ წერტილები, თუ:
 - ა) $a < b$; ბ) $b < 0$ და $a > 0$; გ) $a < -2$ და $b > -1$;
 - დ) $a = 7$ და $b = -1$; ე) $a = -15$ და $b = -20$.



სავარჯიშოები

1. გადაიწერეთ რვეულში და რიცხვებს შორის ჩასვით შესაბამისი ნიშანი $>$, $<$ ან $=$:
 - ა) -3 ? 4 ; ბ) -2 ? -5 ;
 - გ) $-9,8$? $-8,9$; დ) 0 ? $-2\frac{6}{7}$.
2. მოცემული წერტილებიდან რომელი მდებარეობს რიცხვით ღერძზე უფრო მარცხნივ:
 - ა) $A(-6)$ თუ $B(-2)$; ბ) $M(-9,2)$ თუ $N(2)$; გ) $E(-1)$ თუ $F(-\frac{5}{3})$?
3. მოცემული წერტილებიდან რომელი მდებარეობს რიცხვით ღერძზე უფრო მარჯვნივ:
 - ა) $A(-3)$ თუ $B(-2)$; ბ) $M(-\frac{3}{5})$ თუ $N(-1)$; გ) $E(-1,8)$ თუ $F(-\frac{7}{5})$?



ევკლიდე

(დაახლ. ძვ. წ. 325-265)

ძველი ბერძენი მათემატიკოსი

4. დაალაგეთ ქვემოთ მოყვანილი ფაქტები ქრონოლოგიურად:

- ძვ. წ-ის 325 წ. ევკლიდემ შექმნა თავისი გეომეტრიის ნიგნი „ევკლიდეს საწყისები“;
- ძვ. წ. 585 წ. თალეს მილეტელმა იზინასწარმეტყველა მზის დაბნელება;
- ძვ. წ. 220 წ. ერატოსთენემ განსაზღვრა დედამიწის გარშემოწერილობა;
- 1639 წელს დაიბეჭდა თექვსმეტი წლის ბლუზ პასკალის პირველი სამეცნიერო გამოკვლევა.
- 1758 წელს ეილერმა დაამტკიცა მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა მრავალწახნაგების შესახებ.

5. ჩაწერეთ უტოლობის სახით:

- ა) a მეტია სამზე;
- ბ) a ნაკლებია -4 -ზე;
- გ) a არ არის დადებითი რიცხვი;
- დ) a არაუარყოფითი რიცხვია;
- ე) a არ არის 6 -ზე ნაკლები რიცხვი;
- ვ) a ან უარყოფითი რიცხვია, ან ნულია;
- ზ) a ნაკლებია ან ტოლია -2 -ზე.

6. დაალაგეთ ზრდის მიხედვით:

- ა) -3 ; $-2,5$; 0 ; 2 ; $-\frac{1}{5}$;
- ბ) $-1,5$; 0 ; $-4,2$; $3,4$; -10 .

7. დაალაგეთ კლების მიხედვით:

- ა) -2 ; $-9\frac{2}{5}$; 0 ; $3\frac{5}{9}$; -18 ;
- ბ) 2 ; $-6,2$; $-\frac{5}{4}$; $\frac{4}{5}$; $-\frac{2}{3}$.

8. დაასახელეთ ყველა მთელი რიცხვი, რომლებიც მოთავსებულია A და B წერტილებს შორის, თუ:

- ა) $A(2,1)$; $B(6,2)$;
- ბ) $A(-5\frac{3}{5})$; $B(-0,79)$.

9. რამდენი უარყოფითი მთელი რიცხვია მეტი:

- ა) -2 -ზე;
- ბ) $-5\frac{3}{7}$ -ზე;
- გ) $-20,3$ -ზე?

10. მოცემული წერტილებიდან რომელია უფრო შორს რიცხვითი ღერძის სათავიდან:

- ა) 3 თუ -2 ;
- ბ) $-\frac{3}{7}$ თუ $\frac{5}{4}$;
- გ) $-3,6$ თუ $-2\frac{4}{9}$;
- დ) $-3,9$ თუ $3,99$;
- ე) $-20,8$ თუ $-2,08$?

11. აღმოაჩინეთ კანონზომიერება და ჩაწერეთ მომდევნო სამი წევრი:

- ა) $3; 1; -1; -3; -5; -7; \dots$
- ბ) $-3; -8; -13; -18; \dots$
- გ) $-\frac{1}{2}; -1; -1\frac{1}{2}; -2; \dots$

12. ჭეშმარიტია თუ მცდარი შემდეგი წინადადება:
- თუ რიცხვი მეტია -2 -ზე, მაშინ ის აუცილებლად დადებითია;
 - თუ რიცხვი მეტია 5 -ზე, მაშინ ის აუცილებლად დადებითია;
 - თუ რიცხვი ნაკლებია 1 -ზე, მაშინ ის აუცილებლად უარყოფითია;
 - თუ რიცხვი ნაკლებია -10 -ზე, მაშინ ის აუცილებლად უარყოფითი რიცხვია;
 - თუ რიცხვი ნაკლებია 1 -ზე, მაშინ ის შეიძლება იყოს დადებითი;
 - თუ რიცხვი -2 -ზე ნაკლებია, მაშინ ის შეიძლება იყოს დადებითი.
13. რა ციფრი უნდა ჩავსვათ $*$ -ის ნაცლად, რომ მივიღოთ მართებული ჩანაწერი:
- $-32* \leq -326$;
 - $-4,*8 > -5,01$;
 - $-0,*3 < -0,2*$.



კვლევითი დავალება

მოიძიეთ ინფორმაცია საზღვაო სამი და ზამთრის სამი კურორტის დღევანდელი ჰაერის ტემპერატურის შესახებ. შეადარეთ მონაცემები, დაალაგეთ ზრდის მიხედვით და იმსჯელეთ, რატომ არის ზამთრის კურორტებზე უარყოფითი ტემპერატურა.



გამეორება

14. M სიმრავლე 50 ელემენტს შეიცავს, N სიმრავლე -70 -ს, რამდენ ელემენტს შეიძლება შეიცავდეს ა) $M \cup N$; ბ) $M \cap N$?
15. არსებობს თუ არა ისეთი a რიცხვი, რომ შესრულდეს $a = -a$ ტოლობა?



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. გადაიხაზეთ ცხრილი რვეულში და შეავსეთ. მონიშნეთ $A(m)$ და $B(-m)$ წერტილები საკოორდინატო ღერძზე. რით განსხვავდებიან და რა საერთო თვისებით ხასიათდება $A(m)$ და $B(-m)$ წერტილთა ყოველი წყვილი?

m	3		7		$-1\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	$-3,25$	
-m		-5		$5,3$		0			-4



რას შეძლებთ:

- რიცხვითი ღერძის საშუალებით შევადაროთ ერთმანეთს: დადებითი რიცხვები, უარყოფითი რიცხვები;
- რაციონალური რიცხვის შედარებას ნულთან.

6. რიცხვის მოდული



მიზანი:

- გავეცნოთ მოპირდაპირე რიცხვებს;
- შევისწავლოთ რიცხვის მოდულის როგორც გეომეტრიული, ასევე ალგებრული განმარტება.



1. თეა, ნია და ნიკა ერთ 8-სართულიან სახლში ცხოვრობენ. თეა მე-5 სართულზე ცხოვრობს, ნია და ნიკას ბინები კი თეას ბინისაგან 2 სართულითაა დაშორებული. როგორ ფიქრობთ, ერთსა და იმავე სართულზე ცხოვრობენ ნია და ნიკა?
2. რიცხვით ღერძზე მონიშნეთ -2 და 2 -ის, ასევე -4 და 4 -ის შესაბამისი წერტილები. რა საერთო თვისება აქვთ და რით განსხვავდებიან ეს წერტილები ერთმანეთისგან?

როგორც უკვე ვიცით, 1 და (-1) , 2 და (-2) , 3 და (-3) და ა.შ. რიცხვების შესაბამისი წერტილები რიცხვით ღერძზე ათვლის O წერტილის სხვადასხვა მხარეს და მისგან თანაბრად დაშორებული წერტილებია. ასეთ რიცხვებს **მოპირდაპირე რიცხვები** ეწოდებათ. მაშასადამე, 5 -ის მოპირდაპირე რიცხვი (-5) -ია, (-10) -ს მოპირდაპირე რიცხვი კი 10 -ია. საზოგადოდ, ნებისმიერი a რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი $(-a)$ რიცხვი იქნება.

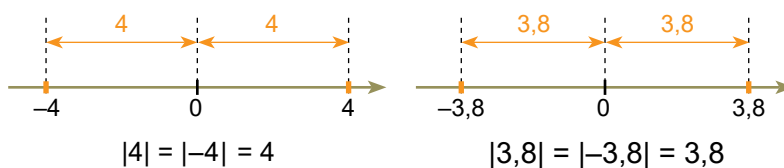


იცოდით, რომ

მანძილის გაზომვა, GPS-ნავიგაცია და რუკების გამოყენება მოდულის იდეას ეფუძნება.

რიცხვითი ღერძის ათვლის სათავედან მოცემული რიცხვის გამომსახველ წერტილამდე მანძილს ამ რიცხვის მოდული, ანუ აბსოლუტური სიდიდე ეწოდება.

a რიცხვის მოდული აღინიშნება ასე: $|a|$.



გადაიხაზეთ ცხრილი რვეულში და შეავსეთ ნიმუშის მიხედვით:

რიცხვი	a	3	-3	5	-5		-8	-9	
მოპირდაპირე რიცხვი	$-a$	-3	3			7	-7		
ამ რიცხვის მოდული	$ a $	3	3						12

დააკვირდით მიღებულ შედეგებს და შეეცადეთ უპასუხოთ:

ა) თუ $a > 0$, მაშინ $|a| = \dots$; ბ) $a < 0$, მაშინ $|a| = \dots$.

განხილული მაგალითებიდან შესაძლებელია დავასკვნათ, რომ:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{თუ } a \geq 0 \\ -a, & \text{თუ } a < 0 \end{cases}$$

დადებითი რიცხვის მოდული თვით ამ რიცხვის ტოლია

$$|a| = a, a > 0$$

უარყოფითი რიცხვის მოდული მისი მოპირდაპირე რიცხვის ტოლია

$$|a| = -a, a < 0$$

ნულის მოდული ნულის ტოლია

$$|0| = 0$$

ყურადღება!

1. ნებისმიერი რიცხვის მოდული არაუარყოფითი რიცხვია:

$$|a| \geq 0$$

2. მოპირდაპირე რიცხვების მოდულები ტოლია:

$$|a| = |-a|$$

მაგალითი 1.

გამოთვალეთ: ა) $|-3| + |-11|$; ბ) $|-17| - |8|$; გ) $|5| - 5$.

ამოხსნა:

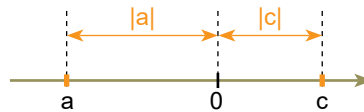
$$\text{ა) } |-3| + |-11| = 3 + 11 = 14;$$

$$\text{ბ) } |-17| - |8| = 17 - 8 = 9;$$

$$\text{გ) } |5| - 5 = 5 - 5 = 0.$$

მაგალითი 2.

ნახაზის მიხედვით იპოვეთ a და c რიცხვების მოდული.



ამოხსნა:

ნახაზიდან ჩანს, რომ c დადებითი რიცხვია, a კი – უარყოფითი, ამიტომ $|c| = c$ და $|a| = -a$.

იმატყველე სწორად!

$$|-9| + |-3|$$

მინუს ცხრისა და მინუს სამის მოდულების ჯამი, ან მინუს ცხრის მოდულს მივუმატოთ მინუს სამის მოდული.



1. რას ეწოდება რიცხვის მოდული?
2. რას უდრის დადებითი რიცხვის მოდული?
3. რას უდრის უარყოფითი რიცხვის მოდული?
4. რისი ტოლია 0-ის მოდული?
5. როგორი დამოკიდებულებაა მოპირდაპირე რიცხვების მოდულებს შორის?
6. როცა $a > b$, შესრულდება თუ არა აუცილებლად $|a| > |b|$?
პასუხი დაასაბუთეთ.



სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $|a|$, თუ $a = -10; -4; -2; 3; 0; 0,9; 12; -3\frac{3}{7}$.
2. თუ $a = -3,5$ და $b = -2\frac{1}{2}$, მაშინ რომელია მეტი:
 - ა) $|a|$ თუ a ;
 - ბ) b თუ $|b|$;
 - გ) $|a|$ თუ $|b|$;
 - დ) $|a+b|$ თუ $|a|+|b|$?
3. გამოთვალეთ:
 - ა) $|-4| + 5$;
 - ბ) $|21| - |-12|$;
 - გ) $|2\frac{3}{4}| + |-3,25|$;
 - დ) $|-4\frac{3}{5}| + |-3\frac{2}{5}|$;
 - ე) $|-5\frac{1}{2}| - |-2,5| + |-3\frac{2}{5}|$;
 - ვ) $|-4,2| - |-3\frac{1}{5}| + |2|$;
 - ზ) $|-99| : |-9| - |-22|$;
 - თ) $|-5\frac{2}{3}| \cdot |-6\frac{6}{17}| - |-1,25|$.
4. დაასახელეთ:
 - ა) სამი რიცხვი, რომელთა მოდული მეტია 2-ზე;
 - ბ) სამი რიცხვი, რომელთა მოდული ნაკლებია 1-ზე;
 - გ) სამი უარყოფითი რიცხვი, რომელთა მოდული მეტია 5-ზე;
 - დ) სამი უარყოფითი რიცხვი, რომელთა მოდული ნაკლებია 1-ზე;
 - ე) სამი უარყოფითი რიცხვი, რომელთა მოდული მეტია 5-ზე და ნაკლებია 8-ზე.
5. იმსჯელეთ და დაადგინეთ, საკმარისია თუ არა მონაცემები ამოცანაში დასმულ შეკითხვაზე პასუხის გასაცემად (უარყოფითი პასუხის შემთხვევაში შეეცადეთ თავად დაამატოთ საჭირო მონაცემი):
 - ა) რომელი ქალაქი მდებარეობს მე-20 მერიდიანსა და 23-ე პარალელზე?
 - ბ) ქუთაისიდან ერთდროულად ორი ავტომობილი გავიდა. იპოვეთ მათ შორის მანძილი მოძრაობის დაწყებიდან 2 საათის შემდეგ, თუ ერთი ავტომობილის სიჩქარეა 55 კმ/სთ, ხოლო მეორისა – 95 კმ/სთ.
 - გ) თომასა და მათეს წლოვანებებს შორის განსხვავება 11 წელია. რამდენი წლისაა მათე, თუ თომა 17 წლისაა?

6. თუ $|a| < 5$, მაშინ ჩამოთვლილთაგან, რომელია აუცილებლად მცდარი:

- ა) $a < 5$; ბ) $a > -5$;
გ) $a \geq -5$; დ) $a = 5$?

7. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ნიმუში: $|-20| : |2 + 3| = 20 : 5 = 4$.

- ა) $|-84| : |3 + 4|$; ბ) $|4 \cdot 25| : |-2,5| + |-10|$.

8. $-5; -0,4; 3; 11$ ჩამოთვლილი რიცხვებიდან რომელი აკმაყოფილებს:

- ა) $|x| < 4$ უტოლობას? ბ) $|x| > 2$ უტოლობას?

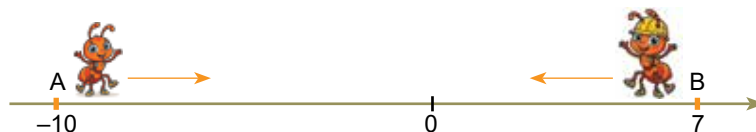
9. ამოხსენით განტოლება:

- ა) $|x| = 4$; ბ) $|x - 1| = 4$; გ) $|x + 2| = 5$;
დ) $|x - 3| = -3$; ე) $|x + 6| = 0$; ვ) $|x - 2| + |x - 5| = 0$.

10. იპოვეთ $|m - 3,5|$ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა ა) $m = 3,5$; ბ) $m = 4$.

11. m -ის რომელი მნიშვნელობისთვის იქნება $|m - 3,2| + 6$ გამოსახულების მნიშვნელობა უმცირესი? რას უდრის ეს უმცირესი მნიშვნელობა?

12. რიცხვით ღერძზე მდებარე ორი $A(-10)$ და $B(7)$ წერტილიდან ერთმანეთის შესახვედრად გამოვიდა ორი ჭიანჭველა. ერთი მათგანი ყოველ წუთში მარჯვნივ გადაადგილდება 2 ერთეულით, მეორე კი – მარცხნივ 3 ერთეულით, თუმცა ყოველი ორი წუთი მოძრაობის შემდეგ ერთ წუთს ისვენებს. რომელი ჭიანჭველა უფრო ადრე მივა O სათავემდე? რა დროში შეხვდებიან ჭიანჭველები ერთმანეთს?



13. შესაძლებელია თუ არა, რიცხვი ნაკლები იყოს 8-ზე, მისი მოდული კი – მეტი 8-ზე? დადებითი პასუხის შემთხვევაში დაასახელეთ ასეთი რიცხვი.

14. ჭეშმარიტია თუ არა შემდეგი წინადადება:

- ა) თუ $|a| > 7$, მაშინ $a > 7$;
ბ) თუ $|a| > |b|$, მაშინ a რიცხვის შესაბამისი წერტილი რიცხვით ღერძზე სათავედან უფრო შორსაა, ვიდრე b რიცხვის შესაბამისი წერტილი;
გ) თუ $|a| > |b|$, მაშინ $a = \pm b$;
დ) თუ $a \neq b$, მაშინ შეუძლებელია $|a| = |b|$;
ე) თუ $|a| + |b| = 0$, მაშინ $a = b = 0$?



კვლევითი დავალება

სახლიდან სკოლაში მისასვლელად სამი განსხვავებული მარშრუტი შეარჩიეთ. განსაზღვრეთ თითოეულის სიგრძე და ახსენით, რატომ აქვს მნიშვნელობა მხოლოდ განვლილ მანძილს და არა მიმართულებას?



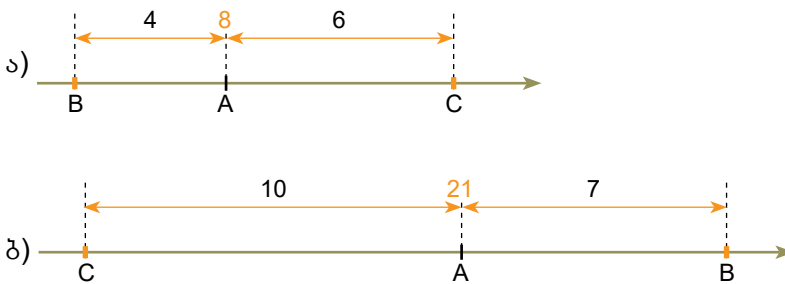
გამეორება

15. რამდენი ელემენტისგან შედგება კენტი ორნიშნა რიცხვების სიმრავლე?
16. ერთი რიცხვი $4\frac{3}{5}$ -ზე $3\frac{4}{9}$ -ით მეტია, მეორე კი – ნაკლებია $\frac{4}{9}$ -ით. იპოვეთ ამ რიცხვების ჯამი.



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. რიცხვით ღერძზე მონიშნულია: ა) A(8), ბ) A(21) წერტილი. იპოვეთ B და C წერტილთა კოორდინატები.



რას შეძლებთ:

- რიცხვის მოდულის პოვნას;
- ამოცანების ამოხსნისას მოდულის თვისებების გამოყენებას.



ეს საინტერესოა

რიცხვთა შორის ისეთი სრულყოფა და შეთანხმებულობა არსებობს, რომ დღეები და ღამეები უნდა ვიფიქროთ მათ საოცარ კანონზომიერებაზე.

სიმონ სტევენე

$$1 \times 1. = 1$$

$$11 \times 11. = 121$$

$$111 \times 111. = 12\,321$$

$$1\,111 \times 1\,111. = 1\,234\,321$$

$$11\,111 \times 11\,111. = 123\,454\,321$$

$$111\,111 \times 111\,111. = 12\,345\,654\,321$$

$$1\,111\,111 \times 1\,111\,111. = 1\,234\,567\,654\,321$$

$$11\,111\,111 \times 11\,111\,111. = 123\,456\,787\,654\,321$$

$$111\,111\,111 \times 111\,111\,111. = 12\,345\,678\,987\,654\,321$$

7. რაციონალური რიცხვების შეკრება



მიზანი:

- შევისწავლოთ რაციონალური რიცხვების შეკრება.



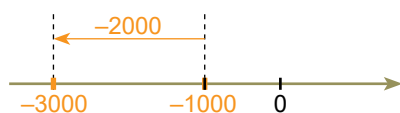
ზამთარი სიღნაღში (1968), ელენე ახვლედიანი (1898-1975).
საქართველოს ეროვნული მუზეუმი – ელენე ახვლედიანის სახლ-მუზეუმი.

2025 წლის 1 იანვარს სიღნაღში ღამის 12 საათზე ტემპერატურა -3°C გრადუსი იყო. რამდენ გრადუსს აჩვენებდა თერმომეტრი დღის პირველი საათისთვის, თუ ტემპერატურამ 5°C -ით აიწია.

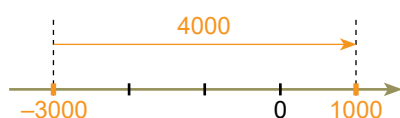
განვიხილოთ ასეთი ამოცანა:

კერძო მენარმემ პირველ თვეში 1000ლ-ით იზარალა, მეორე თვეში – 2000ლ-ით. მესამე თვეში მოგება 4000ლ შეადგინა. რა მოგება მიიღო მენარმემ ამ სამი თვის განმავლობაში?

ამოცანა გადავწყვიტოთ რიცხვითი ლერძის გამოყენებით.



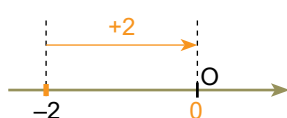
მეორე თვის ბოლოს მისი ზარალი უკვე 3000ლ იყო,



მესამე თვის ბოლოს კი მოგება 1000ლ გახდა.

ვიპოვოთ ჯამი:

$$1) -2 + 2$$



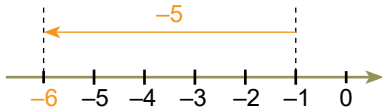
$$-2 + 2 = 0$$

I. საკოორდინატო ლერძზე მოვნიშნოთ (-2) -ის შესაბამისი წერტილი;

II. მიღებული წერტილიდან მარჯვნივ გადავზომოთ 2 ერთეული (ისარი მივმართოთ მარჯვნივ 2 ერთეულით). მივიღებთ $O(0)$ წერტილს.

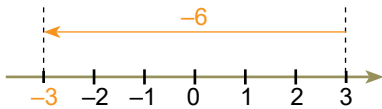
მოპირდაპირე რიცხვების ჯამი ნულის ტოლია: $a + (-a) = 0$

$$2) (-1) + (-5)$$



$$(-1) + (-5) = -6$$

$$3) 3 + (-6)$$



$$3 + (-6) = -3$$

I. საკოორდინატო ღერძზე მოვნიშნოთ (-1) -ის შესაბამისი წერტილი;

II. მიღებული წერტილიდან მარცხნივ გადავზომოთ 5 ერთეული (ისარი მივმართოთ მარცხნივ 5 ერთეულით). მივიღებთ $O(0)$ წერტილიდან, მარცხნივ $1+5=6$ ერთეულით დაშორებულ წერტილს.

I. საკოორდინატო ღერძზე მოვნიშნოთ 3-ის შესაბამისი წერტილი;

II. მიღებული წერტილიდან მარცხნივ გადავზომოთ 6 ერთეული (ისარი მივმართოთ მარცხნივ 6 ერთეულით). მივიღებთ $O(0)$ წერტილიდან, მარცხნივ $6 - 3 = 3$ ერთეულით დაშორებულ წერტილს.

1. რიცხვითი ღერძის საშუალებით შეასრულეთ მოქმედება:

ა) $4 + (-10)$ და $-(10-4)$;

ბ) $-7 + 3$ და $-(7-3)$;

გ) $-7 + 9$ და $9-7$;

დ) $-3 + (-8)$ და $-(3+8)$;

ე) $-11 + (-5)$ და $-(11+5)$.

2. სცადეთ ჩამოაყალიბოთ ერთნაირნიშნაანი, ასევე სხვადასხვანიშნაანი რიცხვების შეკრების წესი

ადვილი შესამჩნევია, რომ

თუ a რიცხვს ვუმატებთ დადებით b რიცხვს, მაშინ $A(a)$ წერტილი საკოორდინატო ღერძზე b ერთეულით მარჯვნივ გადაადგილდება,

ხოლო,

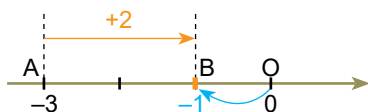
თუ a რიცხვს ვუმატებთ უარყოფით b რიცხვს, მაშინ, პირიქით, $A(a)$ წერტილი საკოორდინატო ღერძზე გადაადგილდება $(-b)$ ერთეულით, რაც იგივეა $|b|$ -ით გადაადგილდება მარცხნივ.

მაგალითად, შევკრიბოთ:

ა) $-3 + 2$;

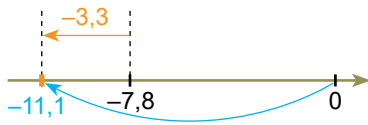
ბ) $-7,8 + (-3,3)$;

გ) $-2 + (-3)$.

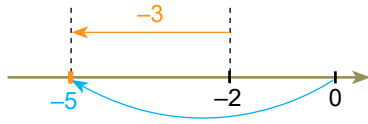


ა) ხედავთ, რომ რიცხვით ღერძზე $OA - AB = OB$. მოდულის განმარტების თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ $|-3| - |2| = 1$. ე.ი. $OB = 1$, მაგრამ, რადგან B წერტილი უარყოფით ნახევარღერძზეა, ამიტომ B წერტილის კოორდინატი იქნება -1 : $B(-1)$.

მივიღეთ: $-3 + 2 = -(|-3| - |2|) = -(3 - 2) = -1$.



$$\text{ბ) } -7,8 + (-3,3) = -(|-7,8| + |-3,3|) = -(7,8 + 3,3) = -11,1.$$



$$\text{გ) } -2 + (-3) = -(|-2| + |-3|) = -(2 + 3) = -5.$$

უარყოფითი რიცხვები რომ შევკრიბოთ, საჭიროა:

1. შევკრიბოთ მათი მოდულები;
2. მიღებული რიცხვის წინ დავწეროთ ნიშანი „-“.

სხვადასხვანაირი რიცხვები რომ შევკრიბოთ, საჭიროა:

1. ვიპოვოთ მათი მოდულები;
2. დიდ მოდულს გამოვაკლოთ პატარა მოდული;
3. მიღებულ სხვაობას დავუწეროთ დიდი მოდულის მქონე რიცხვის ნიშანი.



1. აჩვენეთ, რომ ა) $m + (-m) = 0$; ბ) $m + 0 = 0 + m = 0$.

2. შეასრულეთ მოქმედებები:

ა) $-5 + 3$ და $3 + (-5)$;

ბ) $-12 + (-4)$ და $-4 + (-12)$;

გ) $-4 + 7$ და $7 + (-4)$.

დააკვირდით მიღებულ შედეგებს, რა დასკვნას გამოიტანთ?

გავიხსენოთ!

ნებისმიერ a და b ნატურალური რიცხვებისთვის სრულდება:

$$a + b = b + a$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, ისევე როგორც ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, სრულდება გადანაცვლებადობის თვისება ჯამისთვის.

მაგალითი 1.

გამოთვალეთ:

ა) $(-34) + (-21)$; ბ) $(-12\frac{5}{6}) + 2\frac{2}{3}$; გ) $(-7\frac{2}{9}) + 10\frac{5}{6}$.

ამოხსნა:

ა) $(-34) + (-21) = -(34 + 21) = -55$;

ბ) $(-12\frac{5}{6}) + 2\frac{2}{3} =$ | რადგან $|-12\frac{5}{6}| > |2\frac{2}{3}|$,
 $= -(12\frac{5}{6} - 2\frac{2}{3}) = -10\frac{1}{6}$

გ) $(-7\frac{2}{9}) + 10\frac{5}{6} =$ | რადგან $|10\frac{5}{6}| > |-7\frac{2}{9}|$,
 $= 10\frac{5}{6} - 7\frac{2}{9} = 3\frac{15-4}{18} = 3\frac{11}{18}$



1. როგორ შევკრიბოთ უარყოფითი რიცხვები?
2. როგორ შევკრიბოთ სხვადასხვანიშნიანი რიცხვები?
3. რას უდრის მოპირდაპირე რიცხვების ჯამი?
4. თუ ორი რიცხვის ჯამი დადებითი რიცხვია, შესაძლებელია თუ არა დავასკვნათ, რომ ეს რიცხვები დადებითი რიცხვებია? პასუხი დაასაბუთეთ.
5. თუ ორი რიცხვის ჯამი უარყოფითი რიცხვია, შესაძლებელია თუ არა დავასკვნათ, რომ ეს რიცხვები უარყოფითი რიცხვებია? პასუხი დაასაბუთეთ.



სავარჯიშოები

1. გამოიანგარიშეთ (ზეპირად):

ა) $(-1) + (-14)$;	ბ) $(-5) + 19$;	გ) $12 + (-2)$;	დ) $(-20) + 20$;
ე) $(-9) + 11$;	ვ) $13 + (-12)$;	ზ) $30 + (-23)$;	თ) $(-80) + (-20)$.

2. გამოთვალეთ:

ა) $-2,5 + (-2,5)$;	ბ) $(-5,7) + (-3,4)$;
გ) $(-8,2) + (-2,3)$;	დ) $(-15) + (-6,7)$;
ე) $(-8,9) + (-3,9)$;	ვ) $(-70,48) + (-27,21)$;
ზ) $(-0,001) + (-0,999)$;	თ) $-243,14 + (-43,01)$.

3. იპოვეთ ჯამი:

ა) $\frac{3}{8} + (-\frac{1}{5})$;	ბ) $(-\frac{8}{9}) + (-3\frac{1}{4})$;	გ) $-5\frac{7}{9} + (-2\frac{1}{6})$;	დ) $-4\frac{7}{12} + 6\frac{14}{15}$;
ე) $9\frac{4}{11} + (-1\frac{3}{4})$;	ვ) $-5\frac{4}{5} + (-2\frac{3}{8})$;	ზ) $-12 + (-10\frac{19}{20})$;	თ) $(-4\frac{2}{3}) + (-3\frac{2}{5})$;
ი) $(-7\frac{1}{7}) + (-5\frac{1}{5})$;	კ) $(-2) + 4\frac{12}{17}$.		

4. რას უდრის $2m+1$, თუ $m = 0,5$; -2 ; 0 ; $-3\frac{3}{4}$.

5. თუ $a = -3\frac{2}{3}$ და $b = 1,5$, იპოვეთ რას უდრის:

ა) $a+b$;	ბ) $b+a$;	გ) $3a+2b$;
დ) $a+3b$;	ე) $a+\frac{b}{3}$;	ვ) $ a +b$;
ზ) $ a+b $;	თ) $ a+b +(-2,5)$;	ი) $(a+3b)^2$.

6. იპოვეთ ჯამი და დაასახელეთ, რომელ ორ მომდევნო მთელ რიცხვს შორის არის მოთავსებული პასუხი?

ა) $-2,3 + (-9,7)$;	ბ) $-2,9 + -2,5 $;
გ) $\frac{2}{5} + (-1\frac{3}{4}) + 3\frac{1}{2} $;	დ) $ -4\frac{4}{15} + (-3\frac{7}{12}) + (-5) $.

7. ა) -10 წარმოადგინეთ ორი უარყოფითი რიცხვის ჯამის სახით;
 ბ) -15 წარმოადგინეთ ორი უარყოფითი რიცხვის ჯამის სახით;
 გ) -20 წარმოადგინეთ სამი უარყოფითი რიცხვის ჯამის სახით;
 დ) -24 წარმოადგინეთ ორი სხვადასხვანიშნიანი რიცხვის ჯამის სახით.
8. რას უდრის $-2,3$ -ს და $3,2$ -ს შორის მოთავსებული ყველა მთელი რიცხვის ჯამი?
9. ანამ შეკრიბა $-3,1$ -ს და $4,2$ -ს შორის მოთავსებული ყველა მთელი რიცხვი, ნიკამ $-3,9$ -ს და $4,9$ -ს შორის მოთავსებული ყველა მთელი რიცხვი. რომელი ბავშვის მიღებული პასუხია მეტი? რამდენით?
10. გამოთვალეთ $|m|+|n|$ და $|m+n|$, თუ:
 ა) $m=2$; $n=-2$; ბ) $m=-2,3$; $n=2,1$; გ) $m=-1,8$; $n=-2,2$.
11. ჩაწერეთ ორი მომდევნო მთელი რიცხვის ჯამად:
 ა) 9; ბ) -3 ; გ) -9 ; დ) -45 .
12. მოსწავლეს სწორად ამოხსნილი ამოცანისთვის ეწერება $+2$ ქულა, არასწორად ამოხსნილი ამოცანისთვის კი აკლდება $0,5$ ქულა. რამდენ ქულას დააგროვებს მოსწავლე, თუ ათი ამოცანიდან მხოლოდ ორი ამოხსნა სწორად? შესაძლებელია თუ არა მოსწავლემ მიიღოს $12,5$ ქულა? 13 ქულა?



13. ყველაზე დაბალი ტემპერატურა, რაც ლაბორატორიულ პირობებშია მიღებული, არის $-273,14^{\circ}\text{C}$, რაც $4,21^{\circ}\text{C}$ -ით დაბალია ჰელიუმის დუდილის ტემპერატურაზე. რას უდრის ჰელიუმის დუდილის ტემპერატურა?
14. შესაძლებელია თუ არა, რომ ორი რიცხვის ჯამი ნაკლები იყოს თითოეულ შესაკრებზე?
 დადებითი პასუხის შემთხვევაში მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითები.
15. მტკვრის შესართავი ზღვის დონიდან 28 მ-ით დაბლა მდებარეობს. ზღვის დონიდან რა სიმაღლეზე მდებარეობს სიონის ტაძარი თბილისში, თუ ცნობილია, რომ მტკვარი თბილისში 416 მ-ით მაღლა მიედინება მის შესართავთან შედარებით.

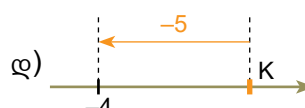
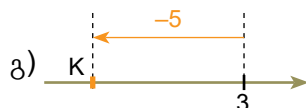
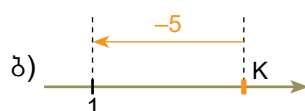
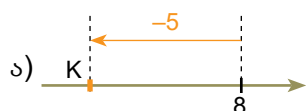


გამეორება

16. ამოხსენით განტოლება:
 ა) $(x+4,5):3=12$; ბ) $|x+2|+2=2$.
17. ბანაკში 120 მოსწავლეა, მათგან 100 -მა იცის ინგლისური, 90 -მა – ფრანგული, ხოლო 80 -მა – იაპონური ენა. ბავშვების რა უმცირესმა რაოდენობამ იცის სამივე ენა?

მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. როგორ ფიქრობთ, რას უდრის K წერტილის კოორდინატი?



რას შეძლებთ:

- რაციონალური რიცხვების შეკრებას რიცხვითი ღერძის გამოყენებით;
- ერთნაირნიშნა და სხვადასხვა ნიშნის რიცხვების შეკრების წესის გამოყენებას;
- ამოცანების ამოხსნისას რაციონალური რიცხვების შეკრების წესის გამოყენებას.

ეს საინტერესოა



რენე დეკარტი (1596-1650)
აგრეთვე ცნობილია, როგორც **კარტეზიუსი**.
ფრანგი ფილოსოფოსი,
მათემატიკოსი და მეცნიერი.

ძველ ეგვიპტეში, ბაბილონსა და ძველ საბერძნეთში უარყოფით რიცხვებს არ იყენებდნენ. თუ განტოლების ამოხსნისას მიიღებდნენ უარყოფით ფესვს, თვლიდნენ, რომ ასეთ განტოლებას ამონახსნი არ ჰქონდა. გამოჩენისას წარმოადგენდა დიოფანტე (III საუკუნე), რომელიც უარყოფით რიცხვებს განიხილავდა როგორც გამოსაკლებს, ხოლო დადებითებს – როგორც მისამატებლებს. მან იცოდა უარყოფითი რიცხვების გამრავლება.

უარყოფითი რიცხვების შესახებ პირველი ცნობები გვხვდება ჩინურ ტრაქტატში – მათემატიკა ცხრა წიგნად (ძვ. წ. II საუკუნე), რომელშიც უარყოფითი რიცხვები აღიქმებოდა როგორც ვალი, ხოლო დადებითი – როგორც ქონება. თუმცა, მაშინ ჯერ კიდევ არ იყო განმარტებული უარყოფითი რიცხვების გამრავლება და გაყოფა.

ინდოელი მათემატიკოსი ბრაჰმაგუპტა (VII საუკუნე) უარყოფით რიცხვებს სრულყოფილებიანად განიხილავდა დადებითებთან ერთად და ჩამოაყალიბა მათზე ოთხივე არითმეტიკული მოქმედების წესი.

ევროპაში უარყოფით რიცხვებს დიდხანს „წარმოსახვით“ ან „აბსურდულ“ რიცხვებად მიიჩნევდნენ. მათი პირველი ხსენება ევროპაში გვხვდება 1212 წელს ლეონარდო პიზელის ნაშრომში „აბაკის წიგნი“, რომელშიც უარყოფითი რიცხვები კვლავ ვალთან ასოცირდებოდა. ტერმინები „დადებითი“ და „უარყოფითი“ ევროპაში XV საუკუნეში დამკვიდრდა, ხოლო ნიშნები „+“ და „-“ შემოიღო იოჰანეს ვიდმანიმ.

XVII საუკუნეში უარყოფით რიცხვებს უკვე საკუთარი ადგილი მიენიჭა რიცხვით ღერძზე. 1637 წელს რენე დეკარტმა შემოიღო მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა, რამაც მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა უარყოფითი რიცხვების დამკვიდრებაში. საბოლოოდ, მათი სრულყოფილი თეორია XIX საუკუნეში ჩამოყალიბდა.

8. რაციონალური რიცხვების გამოკლება



მიზანი:

- შევისწავლოთ რაციონალური რიცხვების გამოკლება.



გიორგიმ ბიზნესის დასაწყებად მეგობრისგან გარკვეული თანხა ისესხა. მისი ყოველწლიური მოგება 14 500 ლ იყო, მაგრამ აღმოჩნდა, რომ 10 წლის შემდეგ მისი მოგება 100 000 ლ-ს შეადგენდა. რა თანხა ისესხა მეგობრისგან გიორგიმ ბიზნესის დასაწყებად?

გავიხსენოთ!

a და b ნატურალური რიცხვების სხვაობა ისეთი c ნატურალური რიცხვია, რომ შესრულდეს: $b + c = a$

$$(-9) + (-4) = -9 + (-4)$$

პირველი შესაკრები შეიძლება დაწეროთ ფრჩხილების გარეშე.

a და b რაციონალური რიცხვის სხვაობა ისეთი c რაციონალური რიცხვია, რომლისთვისაც სრულდება:

$$c + b = a$$

ე.ი. $a - b = c$ ტოლობა ჭეშმარიტია, თუ სრულდება $c + b = a$ ტოლობა.

მაგალითად:

$8 - (-5) = 13,$	რადგან	$13 + (-5) = 8;$
$8 - 12 = -4,$	რადგან	$-4 + 12 = 8;$
$-9 - (-4) = -5,$	რადგან	$-5 + (-4) = -9;$
$-9 - (-14) = 5,$	რადგან	$5 + (-14) = -9.$

თუ დააკვირდებით განხილულ მაგალითებს, შეამჩნევთ:

$8 - (-5) = 13.$	$8 - 12 = -4.$	$-9 - (-4) = -5.$	$-9 - (-14) = 5$
$8 + 5 = 13.$	$8 + (-12) = -4.$	$-9 + 4 = -5.$	$-9 + 14 = 5$

ვხედავთ, რომ რაციონალური რიცხვების სხვაობა შესაძლებელია, შეკრებით შევცვალოთ.

ე.ი. ნებისმიერი a და b რიცხვებისათვის სრულდება:

$$a - b = a + (-b) \quad (1)$$

ორი რიცხვის სხვაობა რომ ვიპოვოთ, საკლებს უნდა დავემატოთ მაკლების მოპირდაპირე რიცხვი.



შეასრულეთ მოქმედება:

- | | | |
|-------------------|---------------|--------------|
| 1. ა) $8-5$; | ბ) $8-(-5)$; | გ) $8-10$. |
| 2. ა) $7-3$; | ბ) $7-(-4)$; | გ) $7-12$; |
| 3. ა) $12-(-2)$; | ბ) $12-15$; | გ) $12-20$. |

დააკვირდით მიღებულ შედეგებს და შეეცადეთ გამოიტანოთ დასკვნა, ორი რიცხვის გამოკლებისას რა შემთხვევაში მიიღება:

- ა) დადებითი რიცხვი; ბ) უარყოფითი რიცხვი?

ალბათ, სწორად იფიქრეთ:

ხოლო

თუ $a > b$, მაშინ $a-b$ სხვაობა დადებითია,

თუ $a < b$, მაშინ $a-b$ სხვაობა უარყოფითია.

კიდევ ერთხელ დავაკვირდეთ 1-ელ ტოლობას.

$a-b = a+(-b)$ | გამოვიყენოთ გადანაცვლებადობის კანონი

$$a-b = a+(-b) = -b+a$$

$$a-b = -b+a$$

ე.ი.

$$a-b-c = -b+a-c = -b-c+a = -c-b+a = -c+a-b = a-c-b$$

მაგალითი 1.

იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $-12-9-17+11$; ბ) $-2\frac{14}{15}-1\frac{9}{45}-3$.

ამოხსნა:

ა) $-12-9-17+11 = -12+(-9)+(-17)+11 = -38+11 = -27$;

ბ) $-2\frac{14}{15}-1\frac{9}{45}-3 = -2\frac{14}{15}+(-1\frac{9}{45})+(-3) = -(2\frac{14}{15}+1\frac{9}{45}+3) = -(6\frac{42+9}{45}) = -7\frac{6}{45} = -7\frac{2}{15}$.



1. რას ეწოდება a და b რიცხვების სხვაობა?
2. როგორ ვიპოვოთ სხვაობა $a-b$?
3. როგორი რიცხვი მიიღება m და n რიცხვების გამოკლებისას, თუ:
ა) $m > n$; ბ) $m < n$.
4. როგორ ფიქრობთ, შესაძლებელია თუ არა ორი რიცხვის სხვაობა მეტი იყოს ამავე რიცხვების ჯამზე? მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითი.



სავარჯიშოები

1. გამოიანგარიშეთ (ზეპირად):

- ა) $-3-2$; ბ) $-12-15$; გ) $-0,3-4,7$; დ) $-2-(-7)$;
 ე) $-10-(-19)$; ვ) $(-18)-(-22)$; ზ) $-19-(-19)$; თ) $-20-(-100)$.

2. გამოთვალეთ:

- ა) $-2,8-3,9$; ბ) $-9,4-(-3,9)$; გ) $-4,1-(-7,2)$;
 დ) $(-1,02)-(-6,52)$; ე) $-3,08-(-2,52)$; ვ) $-8,9-(-8,9)$.

3. შეასრულეთ მოქმედებები:

- ა) $-\frac{1}{7}-(-\frac{3}{7})$; ბ) $-2\frac{4}{7}-(-1\frac{4}{7})$;
 გ) $-6\frac{3}{5}-(-2,8)$; დ) $-\frac{3}{8}-1\frac{1}{2}$;
 ე) $-2,5-(-1\frac{1}{7})-4\frac{1}{4}$; ვ) $-6\frac{11}{12}-(-3\frac{7}{9})+1,5$.

4. რას უდრის $a-b$, თუ:

- ა) $a=2$, $b=-1$; ბ) $a=-2,3$, $b=1,1$;
 გ) $a=2\frac{1}{4}$, $b=-\frac{3}{4}$; დ) $a=-1\frac{2}{5}$, $b=-2\frac{1}{3}$.

5. რიცხვით ღერძზე მონიშნულია $A(-12)$; $B(-6\frac{1}{2})$; $C(-2,7)$ და $D(3)$. AB , BC , CD მონაკვეთებიდან რომელი მონაკვეთის სიგრძეა უმცირესი? უდიდესი?

6. შეადგინეთ რიცხვითი გამოსახულება და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა:

- ა) $\frac{4}{9}$ და $\frac{5}{12}$ -ის ჯამის განაყოფი $\frac{31}{36}$ -ზე;
 ბ) $-1\frac{8}{27}$ -ისა და $(-1\frac{19}{27})$ -ის ჯამი შემცირებული 1-ით.

7. ეკატერინემ დაწერა უდიდესი მთელი უარყოფითი რიცხვი, რომელიც ჩანერილია ხუთი განსხვავებული ციფრით, მარიამმა – უმცირესი მთელი უარყოფითი რიცხვი, რომელიც ჩანერილია სამი განსხვავებული ციფრით. დემეტრემ გოგოების დაწერილი რიცხვებიდან უმცირესს გამოაკლო უდიდესი. რა რიცხვი მიიღო დემეტრემ?

8. დააკვირდით რიცხვთა მწკრივს, აღმოაჩინეთ კანონზომიერება და დაწერეთ მომდევნო ორი წევრი:

- ა) $5; 2; -1; -4; -7; \dots$; ბ) $-1; -2,5; -4; -5,5; \dots$.

9. კალია რიცხვით ღერძზე $A(-3,2)$ წერტილში ზის და ყოველ წუთში $1,6$ ერთეულის ტოლი ნახტომით მარცხნივ გადაადგილდება. რამდენი წუთის შემდეგ აღმოჩნდება პირველად ისეთ წერტილში, რომელსაც მთელი კოორდინატი აქვს? უპასუხეთ ამოცანას იმ შემთხვევაშიც, კალია მარჯვნივ რომ დახტოდეს რიცხვით ღერძზე.



10. ვერცხლისწყალი $-38,83^{\circ}\text{C}$ -ზე დნება, ხოლო სპილენძი დნება $1083,4^{\circ}\text{C}$ -ზე. რამდენითაა მეტი სპილენძის დნობის ტემპერატურა ვერცხლისწყლის დნობის ტემპერატურაზე?

11. მაცივრის ჩართვისას ტემპერატურა 0°C იყო. 1 სთ-ის შემდეგ ტემპერატურა -3°C გახდა. რისი ტოლი იქნება ტემპერატურა ა) 2 საათის, ბ) 6 საათის შემდეგ, თუ ცნობილია, რომ მაცივარში ტემპერატურა ამ დროის განმავლობაში თანაბრად იკლებდა.
12. ყველაზე დაბალი ტემპერატურა, რომელიც დედამიწაზე დაფიქსირებულა, $-89,2^{\circ}\text{C}$ -ია, რაც $83,8^{\circ}\text{C}$ -ით მაღალია მთვარის ზედაპირზე დაფიქსირებულ ყველაზე დაბალ ტემპერატურაზე. რისი ტოლია მთვარის ზედაპირზე დაფიქსირებული ყველაზე დაბალი ტემპერატურა?
13. გენესარეთის ტბა ისრაელში ზღვის დონიდან -212 მეტრზე მდებარეობს, ნაზარეთი კი -298 მეტრზე. რამდენი მეტრით მაღლა მდებარეობს ნაზარეთი გენესარეთის ტბასთან შედარებით?
14. რიცხვით ღერძზე მონიშნულია A და B წერტილები. AB მონაკვეთი დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ მონიშნული წერტილების კოორდინატები, თუ
ა) $A(-7)$, $B(2)$; ბ) $A(-1,2)$, $B(3,6)$.



კვლევითი დავალება

ერთი კვირის განმავლობაში ჩაინერეთ თქვენი პირობითი შემოსავალი (+) და ხარჯები (-), შეადგინეთ ცხრილი და გამოთვალეთ საბოლოო შედეგი.



გამეორება

15. იპოვეთ x -ის რამდენიმე მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $x+|x|=0$ ტოლობა:
ა) შესრულდება; ბ) არ შესრულდება
16. რამდენი განსხვავებული მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს $\frac{m}{|m|}$ გამოსახულებამ?
17. რიცხვით ღერძზე მონიშნეთ $P(-5)$ და $Q(1)$ წერტილები. რიცხვითი ღერძის საშუალებით იპოვეთ იმ წერტილის კოორდინატი, რომელიც ორჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული P წერტილიდან, ვიდრე Q წერტილიდან. რამდენი ამონახსნი აქვს ამოცანას?



რას შეძლებთ:

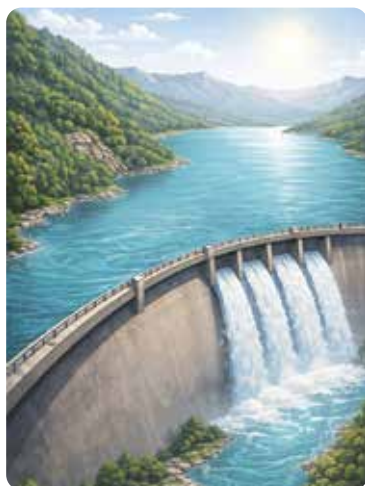
- იპოვო რაციონალური რიცხვების სხვაობა შეკრების საშუალებით;
- სხვადასხვა პრობლემურ სიტუაციაში დაინახო მათემატიკური ამოცანა და იპოვო მისი ამოხსნის გზა.

9. რაციონალური რიცხვების გამრავლება-გაყოფა



მიზანი:

- შევისწავლოთ რაციონალური რიცხვების გამრავლება-გაყოფა.



$(-\frac{4}{5}) \cdot 10 = -\frac{4}{5} \cdot 10$
პირველი თანამამრავლი
შეიძლება დავწეროთ
ფრჩხილების გარეშე

1. წყლის დონე წყალსაცავში ყოველთვიურად -0.3 მ-ით იცვლება. რამდენი მეტრით შეიცვლება წყლის დონე წყალსაცავში 5 თვის შემდეგ?

2. წარმოადგინეთ ჯამის სახით:

ა) $5 \cdot 3$; ბ) $4 \cdot 6$; გ) $(-3) \cdot 4$.

დიახ, $(-3) \cdot 4 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$;

$(-8) \cdot 3 = (-8) + (-8) + (-8) = -24$.

ისევე, როგორც ნატურალური რიცხვებისათვის, გამრავლების გადანაცვლებადობის კანონი სრულდება რაციონალური რიცხვებისთვისაც, ამიტომ

$(-8) \cdot 3 = 3 \cdot (-8) = -24$. და $-24 = -(3 \cdot 8)$

$-\frac{4}{5} \cdot 10 = 10 \cdot (-\frac{4}{5}) = -8$. და $-8 = -(\frac{4}{5} \cdot 10)$

კიდევ ერთხელ დავაკვირდეთ ამ ნამრავლებს:

$8 \cdot 3 = 24$; $(-8) \cdot 3 = -24$; $8 \cdot (-3) = -24$.

ადვილად შეამჩნევთ, რომ თუ ერთ-ერთმა თანამამრავლმა ნიშანი შეიცვალა, ნამრავლიც ნიშანს იცვლის, ამიტომ

$8 \cdot 3 = 24$. $-8 \cdot 3 = -24$

$8 \cdot (-3) = -24$ $-8 \cdot (-3) = 24$

მაშასადამე:

ორი რაციონალური რიცხვის გამრავლებისას საჭიროა, გადავამრავლოთ მათი მოდულები და მიღებულ ნამრავლს დავუწეროთ:

ა) „-“ ნიშანი, თუ ეს რიცხვები სხვადასხვანიშნაანებია;

ბ) „+“ ნიშანი, თუ ეს რიცხვები ერთნაირნიშნაანებია.

ადვილი სანახავია, რომ

$$a \cdot (-1) = -1 \cdot a = -a$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

რაციონალური რიცხვების გაყოფა, ნატურალური რიცხვების გაყოფის მსგავსად, განიმარტება გამრავლების საშუალებით.

გავიხსენოთ!

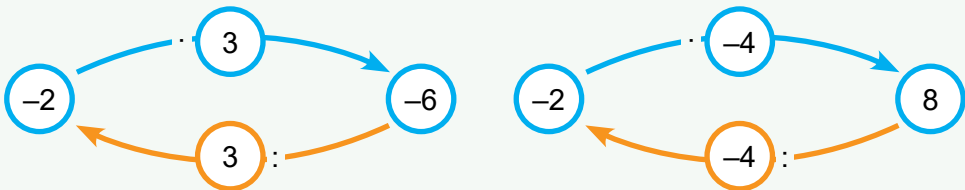
a ნატურალური რიცხვი გავყოფთ **b** ნატურალურ რიცხვზე ნიშნავს, ვიპოვოთ ისეთი **c** რიცხვი, რომ შესრულდეს:

$$a = bc$$

a რაციონალური რიცხვი გავყოფთ **b** ($b \neq 0$) რაციონალურ რიცხვზე ნიშნავს, ვიპოვოთ ისეთი **c** რაციონალური რიცხვი, რომ შესრულდეს:

$$a = bc$$

1. იპოვეთ: ა) $16 : (-2)$; ბ) $-12 : 3$; გ) $18 : (-6)$.



2. დააკვირდით მიღებულ შედეგებს და სცადეთ ჩამოაყალიბოთ ორი რაციონალური რიცხვის გაყოფის წესი.

ორი რაციონალური რიცხვის გაყოფისას საჭიროა, გასაყოფის მოდული გავყოფთ გამყოფის მოდულზე და მიღებულ განაყოფს დავუწეროთ:

ა) „-“ ნიშანი, თუ ეს რიცხვები სხვადასხვანაირნიშანებიან;

ბ) „+“ ნიშანი, თუ ეს რიცხვები ერთნაირნიშანებიან.

ნულზე გაყოფა
არ შეიძლება

$$a : 1 = a$$

თუ $a \neq 0$, მაშინ

$$a : a = 1; \quad 0 : a = 0$$

მაგალითი 1.

გამოთვალეთ:

ა) $-3 \cdot 6,5$; ბ) $7,8 : (-0,3)$; გ) $-12,6 : (-2,1)$.

ამოხსნა:

ა) $-3 \cdot 6,5 = -19,5$;

ბ) $7,8 : (-0,3) = -(78 : 3) = -26$;

გ) $-12,6 : (-2,1) = 126 : 21 = 6$.

მაგალითი 2.

გამოთვალეთ:

ა) $(-1)(-2)(-3)(-4)$;

ბ) $(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)$.

ამოხსნა

ა) $(-1)(-2)(-3)(-4) = 24$;

ბ) $(-1)(-2)(-3)(-4)(-5) = -120$.

ყურადღება!

რამდენიმე რიცხვის გამრავლებისას ნამრავლის წინ იწერება:

ა) ნიშანი „+“, თუ უარყოფით თანამამრავლთა რაოდენობა ლუწია,

ბ) ნიშანი „-“, თუ უარყოფით თანამამრავლთა რაოდენობა კენტია.



- როგორ ფიქრობთ, როგორი ნიშნები აქვს ორ თანამამრავლს, თუ ნამრავლი
ა) უარყოფითია? ბ) დადებითია?
- როგორ გადავამრავლოთ ორი
ა) უარყოფითი რიცხვი; ბ) სხვადასხვანაირი რიცხვი?
- რა შემთხვევაშია ორი რიცხვის ნამრავლი 0-ის ტოლი?
- ჩამოაყალიბეთ, როგორ გავყოთ ორი
ა) უარყოფითი რიცხვი; ბ) სხვადასხვანაირი რიცხვი?



სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ (ზეპირად):

ა) $(-4) \cdot (-3)$;

ბ) $(-12) \cdot (-4)$;

გ) $(-5) \cdot 3$;

დ) $6 \cdot (-8)$;

ე) $(-11) \cdot 7$;

ვ) $8 \cdot (-19)$;

ზ) $-24 : 8$;

თ) $-35 : (-7)$;

ი) $-45 : (-4 - 5)$;

კ) $100 : (3 - 23)$;

ლ) $(-28 + 28) : (-298)$;

მ) $-120 + (-2) \cdot (-60)$.

2. გამოიანგარიშეთ:

ა) $-13 \cdot 0,5$;

ბ) $-2,6 \cdot 3$;

გ) $-3,2 \cdot (-1,5)$;

დ) $-\frac{2}{11} \cdot \frac{33}{46}$;

ე) $-1\frac{5}{9} \cdot 4,5$;

ვ) $(-2,4) : (+1,2)$;

ზ) $\frac{4}{15} \cdot (-3\frac{1}{8})$;

თ) $-\frac{15}{16} \cdot 0$;

ი) $-3\frac{5}{9} \cdot (-18)$.

3. -4 წარმოადგინეთ წილადის სახით, რომლის მნიშვნელია:

ა) -3;

ბ) 5;

გ) -12;

დ) 115.

4. გამოთვალეთ:

ა) $(-3)^2$; ბ) $(-1,2)^2$; გ) $(-\frac{5}{9})^2$;
 დ) $(-1\frac{2}{5})^2$; ე) $(-2)^3$; ზ) $(-\frac{2}{5})^4$.

მიღებული პასუხების დახმარებით გამოიტანეთ დასკვნა უარყოფითი რიცხვების ნატურალურ ხარისხთან დაკავშირებით.

5. გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $2x^2$, თუ $x = -3$; ბ) $-3x - 2$, თუ $x = -10$;
 გ) $-2x^2 - 5$, თუ $x = -8$; დ) $2 + 4x$, თუ $x = -1,5$;
 ე) $3 + 7x$, თუ $x = -2\frac{2}{7}$; ვ) $5 + |x^2 - 2\frac{1}{4}|$, თუ $x = -\frac{1}{2}$.

6. გამოთვალეთ:

ა) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-1)$; ბ) $(-6) \cdot (-12) : (-4) : (-2)$;
 გ) $(-10) : (-5) \cdot (-12)$; დ) $(-36) : (+9) : (+4) \cdot (-2)$;
 ე) $(+44) : (-11) \cdot 5 : (-20)$; ვ) $(-13) \cdot (-4) : (-26) \cdot (+10)$.

7. იპოვეთ $|xy-z|$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ:

ა) $x = -2$; $y = -8$, $z = -1$; ბ) $x = -2\frac{3}{7}$; $y = 1\frac{4}{17}$; $z = -3$.

8. დაასახელეთ m -ის ყველა ნატურალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა:

ა) $4m < 13$; ბ) $-4m > -12$; გ) $-8m \geq -70$; დ) $-0,3m > -2$.

9. შეადგინეთ რიცხვითი გამოსახულება და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა:

ა) 0,5-ის ნამრავლი (-25) -ისა და 7-ის ჯამზე;
 ბ) 0,5-ის ჯამი (-2) -ისა და 7-ის ნამრავლზე;
 გ) (-12) -ისა და 8-ის ჯამის კვადრატი;
 დ) (-6) -ისა და 5-ის კვადრატების ჯამი.

10. a -ს რამდენი ნატურალური მნიშვნელობისთვის იქნება სამართლიანი უტოლობა:

ა) $\frac{12}{a} > 2$; ბ) $\frac{-15}{a} \geq 3$?

11. გადაინერეთ და გამოთვალეთ:

ა)

-3

 +

-16

 -

-3

 =

?

ბ)

-6,2

 ×

-2

 :

4

 =

?

გ)

10,8

 :

-9

 -

-1,1

 =

?

12. შეასრულეთ მოქმედებები:

ა) $(-\frac{4}{15} + \frac{7}{12}) : (-12\frac{2}{3})$;

ბ) $1\frac{3}{5} - (-\frac{19}{21}) \cdot \frac{42}{95}$;

გ) $-0,39 : (8\frac{9}{10} - 10,2)$;

დ) $(2\frac{1}{2} - 3,1) \cdot 4\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{14} + 0,4$.

13. ნულისგან განსხვავებული a და b რიცხვებისთვის რომელი შეფარდებებია ტოლი?

$-\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{-b}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$.

14. ანას დაავალეს ორი უარყოფითი რიცხვის შეფარდების პოვნა. მან შეცდომით, გაყოფის ნაცვლად, გამრავლება შეასრულა, თუმცა პასუხი მაინც სწორი მიიღო. შესაძლებელია თუ არა ეს?



გამეორება

15. ერთი რვეული x თეთრი ღირს. თუ ანი 6 რვეულს იყიდის, მაშინ მას 30 თეთრი დარჩება. დაწერეთ გამოსახულება: რა თანხა ჰქონია ანის?

16. კლასის მოსწავლეები დავით ჯგუფებად: M – ბიჭები, F – გოგონები, A – მოსწავლეები, რომლებსაც უყვართ მათემატიკა, T – მოსწავლეები, რომლებსაც უყვართ ლიტერატურა, S – მოსწავლეები, რომლებიც დადიან ფეხბურთზე. აღწერეთ შემდეგი სიმრავლეები:

ა) $M \cap A$; ბ) $M \cap F$; გ) $A \cap T \cap F$; დ) $M \cap A \cap S$.



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. გამოთვალეთ მოხერხებული გზით:

ა) $0,2 \cdot 38,72 \cdot 5$;

ბ) $0,4 \cdot 17,27 \cdot 2,5$;

გ) $5,24 \cdot 4,6 + 4,76 \cdot 4,6$;

დ) $27,12 \cdot 7\frac{10}{23} - 2\frac{13}{23} \cdot 27,12$.



რას შეძლებთ:

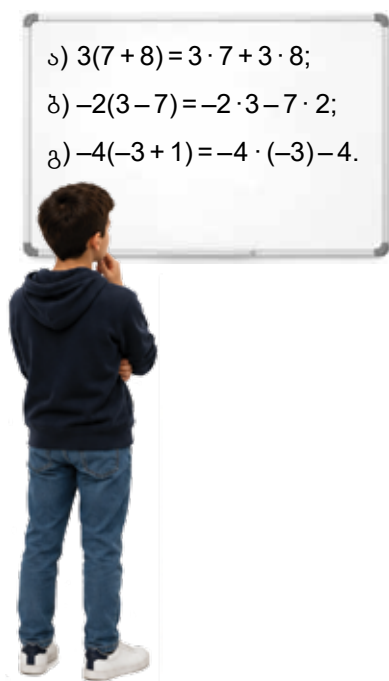
- ერთნაირნიშნიანი და სხვადასხვანიშნიანი რიცხვების გამრავლებასა და გაყოფას.
- თანამამრავლთა ნიშნების მიხედვით შეძლებ განსაზღვრო ნამრავლის ნიშანი.
- სხვადასხვა პრობლემურ სიტუაციებში არსებული ცოდნის საფუძველზე გაიაზრო პრობლემის გადაჭრის გზა და გამოიტანო სწორი დასკვნა.

10. არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებები რაციონალური რიცხვებისთვის



მიზანი:

- შევისწავლოთ გამრავლების განრიგებადობის კანონის გამოყენებით გამოსახულების გამარტივება;
- ფრჩხილების გახსნა.



ა) $3(7 + 8) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8$;
 ბ) $-2(3 - 7) = -2 \cdot 3 - 7 \cdot 2$;
 გ) $-4(-3 + 1) = -4 \cdot (-3) - 4$.

1. გამოთვალეთ:

ა) $-\frac{8}{17} \cdot 2\frac{2}{19} \cdot 34 \cdot (-\frac{57}{160})$;
 ბ) $2\frac{5}{8} \cdot (-\frac{5}{22}) - 7\frac{1}{4} \cdot (\frac{5}{22}) + (-\frac{5}{22}) \cdot 1\frac{1}{8}$.

2. როგორ ფიქრობთ, სწორია თუ არა დაფაზე მოცემული ტოლობები?

რაციონალური რიცხვებისთვის ისევე, როგორც ნატურალური რიცხვებისათვის, სრულდება არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებები.

ნებისმიერი a და b რიცხვებისთვის სამართლიანია:

1. გადანაცვლებადობის თვისება:

ა) $a + b = b + a$ შეკრებისთვის
 ბ) $ab = ba$ გამრავლებისთვის

2. ჯუფთებადობის თვისება:

ა) $(a + b) + c = a + (b + c)$ შეკრებისთვის
 ბ) $(ab)c = a(bc)$ გამრავლებისთვის

3. განრიგებადობის თვისება:

ა) $a(b + c) = ab + ac$ ჯამისთვის
 ბ) $a(b - c) = ab - ac$ სხვაობისთვის



იცოდით, რომ

არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებები ინჟინრებს, პროგრამისტებსა და სხვა პროფესიის ადამიანებსაც ეხმარება რთული გამოთვლების გამარტივებაში.

ამ თვისებების გამოყენება ხშირად ამარტივებს გამოთვლებს.

მაგალითი 1.

ა) $9,9 + 4\frac{5}{7} - 3,9 - 2\frac{3}{7} =$ | გადანაცვლებადობის თვისება

$= 9,9 - 3,9 + 4\frac{5}{7} - 2\frac{3}{7} =$ | ჯუფთებადობის თვისება

$= (9,9 - 3,9) + (4\frac{5}{7} - 2\frac{3}{7}) = 6 + 2\frac{2}{7} = 8\frac{2}{7}.$

ბ) $-2\frac{3}{4} \cdot (-2\frac{3}{9})(-4)(-9) =$ | უარყოფით თანამამრავლთა რაოდენობა
ლუნია; გადანაცვლებადობის თვისება.

$= \frac{11}{4} \cdot 4 \cdot \frac{21}{9} \cdot 9 = 11 \cdot 21 = 231$

გ) $(\frac{2}{7} - \frac{5}{8})56 =$ | განრიგებადობის თვისება

$= \frac{2}{7} \cdot 56 - \frac{5}{8} \cdot 56 = 16 - 35 = -19$

დ) $7,2 \cdot (-1\frac{1}{15}) - 2,8 \cdot 1\frac{1}{15} = -7,2 \cdot 1\frac{1}{15} - 2,8 \cdot 1\frac{1}{15} =$ | განრიგებადობის თვისება

$= 1\frac{1}{15}(-7,2 - 2,8) = \frac{16}{15} \cdot (-10) = -10\frac{2}{3}.$

მაგალითი 2.

გამოსახულება წარმოვადგინოთ ჯამის სახით:

ა) $7(-2a + 7)$; ბ) $-7(-5a - 3)$; გ) $-(3a - 11)$; დ) $1 + (4a + 2)$.

ამოხსნა:

გამოვიყენოთ გამრავლების განრიგებადობის თვისება

ა) $7(-2a + 7) = 7 \cdot (-2a) + 7 \cdot 7 = -14a + 49$;

ბ) $-7(-5a - 3) = -7 \cdot (-5a) - 3 \cdot (-7) = 35a + 21$;

გ) $-(3a - 11) = (-1) \cdot (3a - 11) = (-1) \cdot 3a - 11 \cdot (-1) = -3a + 11$;

დ) $1 + (4a + 2) = 1 + 1 \cdot (4a + 2) = 1 + 4a + 2 = 4a + 3.$

განრიგებადობის თვისების გამოყენებით მივიღეთ გამოსახულება, რომელიც არ შეიცავს ფრჩხილებს. ასეთ გარდაქმნას **ფრჩხილების გახსნა** ეწოდება.

ამრიგად,

თუ ფრჩხილების წინ დგას ნიშანი „+“, მაშინ ეს ნიშანი და ფრჩხილები შეგვიძლია არ დავწეროთ, ხოლო ფრჩხილებში მოთავსებული წევრები უნდა დავწეროთ იმავე ნიშნით.

თუ ფრჩხილების წინ დგას ნიშანი „-“, მაშინ ეს ნიშანი და ფრჩხილები შეგვიძლია არ დავწეროთ, მაგრამ ფრჩხილებში მოთავსებული თითოეული შესაკრების ნიშანი შეიცვლება საწინააღმდეგო ნიშნით.

$a + (b + c) = a + b + c$; $a + (-b - c) = a - b - c$; $a - (b + c) = a - b - c$; $a - (-b + c) = a + b - c$;

$a + (b - c) = a + b - c$; $a + (-b + c) = a - b + c$; $a - (b - c) = a - b + c$; $a - (-b - c) = a + b + c.$

გამრავლების განრიგებადობის კანონი შესაძლებელია ასეთი სახითაც ჩავწეროთ:

$$ab + ac = a(b + c),$$

$ab + ac$ გამოსახულების $a(b + c)$ გამოსახულებით შეცვლას საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანა ეწოდება.

მსგავსი წევრების შეერთებისას საჭიროა შევკრიბოთ მათი კოეფიციენტები და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ საერთო ასოთ ნაწილზე.

მაგალითად, $7x - 7y = 7(x - y);$

$$48x - 8y = 6 \cdot 8x - 8y = 8(6x - y);$$

$$-3a + 8a - 12a = a(-3 + 8 - 12) = -7a.$$

$-3a; 8a; -12a$ – მსგავსი წევრებია, ხოლო გამარტივება, რომლის დროსაც $-3a + 8a - 12a$ გამოსახულება $7a$ -თი შევცვალეთ – მსგავსი წევრების შეერთება.



- ჩამოაყალიბეთ არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებები.
როგორ წევრებს ეწოდება მსგავსი წევრები?
როგორ შევაერთოთ მსგავსი წევრები?
- როგორ რიცხვს მიიღებთ, დადებითს თუ უარყოფითს, თუკი გადაამრავლებთ:
 - სამ დადებით და შვიდ უარყოფით რიცხვს;
 - რვა დადებით და ოთხ უარყოფით რიცხვს?
 პასუხი დაასაბუთეთ.
- რამდენ უარყოფით თანამამრავლს შეიცავს ნამრავლი, თუ ის
 - დადებითია;
 - უარყოფითია?



სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ შედარებით მარტივი ხერხით:

ა) $2,3 \cdot 3,8 + 2,3 \cdot 6,2;$ ბ) $12,9 \cdot (-5) - 2,9 \cdot (-5).$

2. ნიმუშის მიხედვით გამოთვალეთ ნამრავლი:

ნიმუში: $7 \cdot (-82) = 7 \cdot (-80 - 2) = -560 - 14 = -574;$ $7 \cdot (-79) = 7 \cdot (-80 + 1) = -560 + 7 = -553.$

ა) $8 \cdot (-37);$ ბ) $4 \cdot (-59);$
გ) $(-6) \cdot (-18);$ დ) $(-7) \cdot (-76).$

3. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $3x + 3x;$ ბ) $6a - 12a;$ გ) $21m + 14m;$
დ) $36ax + 27ax;$ ე) $15mn + 30mn;$ ვ) $10a^2 + 70a^2.$

4. *-ის ნაცვლად ჩასვით შესაბამისი კოეფიციენტი, რომ მიიღოთ სწორი ტოლობა:

ა) $4k - *k = -10k$;

ბ) $-2,4p + *p = 1,3p$;

გ) $*t - t = 0,5t$;

დ) $*pq - \frac{3}{5}pq = \frac{1}{2}pq$.

5. გახსენით ფრჩხილები:

ა) $2(2a + 3b)$;

ბ) $3(-m - 12n)$;

გ) $-(-8m + 3)$;

დ) $-0,3(-3xy + 2)$.

6. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $3 + 2(-3x - 4)$;

ბ) $-12a + 3(-4a - 7)$;

გ) $-(-5mn - 2) + 12mn$;

დ) $10p - 3(-2p - 5)$.

7. გამოიყენეთ არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებები და გამოიანგარიშეთ:

ა) $3,2 - 6\frac{8}{15} + 10,8$;

ბ) $-3\frac{2}{3} + 0,5 - 9\frac{1}{3}$;

გ) $0,7 + 2\frac{6}{11} - 9,7 - \frac{6}{11}$;

დ) $2,5 - 10\frac{9}{10} - 0,1 + \frac{1}{2}$.

8. გამოიყენეთ არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებები და გამოიანგარიშეთ რაციონალური გზით:

ა) $\frac{3}{13} \cdot (-10) \cdot (-\frac{1}{5}) \cdot 26$;

ბ) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} : (-\frac{1}{16}) \cdot 14$;

გ) $(-1\frac{2}{3}) \cdot (-2\frac{1}{4}) \cdot (-3) \cdot (-8)$;

დ) $\frac{3}{8} \cdot 0,12 \cdot (-1\frac{1}{15}) \cdot 100$.

9. დაწერეთ მოცემული გამოსახულებების ჯამი და გაამარტივეთ:

ა) $a + 3$ და $a + 6$;

ბ) $2a + 3$ და $-a + 1,2$;

გ) $-2,3a - 2,5$ და $12 - 0,7a$;

დ) $-(-a + 7)$ და $-(-3a - 4)$.

10. დაწერეთ მოცემული გამოსახულებების სხვაობა და გაამარტივეთ:

ა) $2m + 10$ და $m + 6$;

ბ) $-3m + 2$ და $m + 0,5$;

გ) $-4,3m - 6$ და $1 - 0,7m$;

დ) $-(-32 - 3m)$ და $-(-3m - 2)$.

11. $15x - 23$ წარმოადგინეთ ორი გამოსახულების:

ა) ჯამის;

ბ) სხვაობის სახით.

12. გაამარტივეთ:

ა) $3(-2x - 9) - 10x$;

ბ) $-(9x - 2) + 3x + 1$;

გ) $0,9x - (-12 - 1\frac{1}{5}x)$;

დ) $2\frac{5}{9}x + 2(\frac{5}{6}x - 0,25)$;

13. განრიგებადობის თვისებით გამოიანგარიშეთ მარტივად:

ა) $(\frac{5}{6} + \frac{3}{4}) \cdot 12$;

ბ) $(-\frac{1}{15} - \frac{7}{12}) \cdot (-120)$;

გ) $(1\frac{3}{11} - 2\frac{1}{5}) \cdot (-55)$;

დ) $(-1\frac{6}{13}) \cdot (-24,8) + (-1,2) \cdot (-1\frac{6}{13})$.

14. ჩაწერეთ ფრჩხილების გარეშე:

ა) $+(2x + 3y - 3)$;

ბ) $-(-9a - 3b + 8c - 2)$;

გ) $-(-\frac{12}{19}m - 3\frac{5}{8}n - 0,345)$;

დ) $+(+4p - 2\frac{1}{3}q - 2,34)$.

15. გაამარტივეთ გამოსახულება და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა:

ა) $-3a - (-4a + 2)$, თუ $a = -2,5$;

ბ) $-0,5b + (-3 + b) - 3b$, თუ $b = -4$;

გ) $\frac{2}{3}m - (-\frac{3}{5} + \frac{3}{4}m) - \frac{1}{6}m$, თუ $m = -0,25$;

დ) $\frac{1}{3}x - (-\frac{2}{5}x - 2) - 1,1$, თუ $x = -15$.

16. გამოიანგარიშეთ მარტივად:

ა) $(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}) \cdot 24$;

ბ) $(-\frac{1}{8} - \frac{5}{6}) \cdot (-24)$;

გ) $(-1\frac{1}{6}) \cdot (-10,8) + (-1,2) \cdot (-1\frac{1}{6})$;

დ) $1324 \cdot 726 + 1324 \cdot 274 - 324 \cdot 1000$.



კვლევითი დავალება

გამოთვალეთ სამი განსხვავებული ხერხით: 99×37 .

დაფიქრდით: ● რომელი ხერხი აღმოჩნდა უფრო მოსახერხებელი?

● არითმეტიკულ მოქმედებათა რომელი თვისებები გამოიყენე?

● რომელ გზას აირჩევდი ზეპირად გამოსათვლელად და რატომ?



გამეორება



რიცხვით ღერძზე მოცემულია $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$; $D(d)$ წერტილები. ნახაზის მიხედვით, რომელი შეფასებაა ჭეშმარიტი?

ა) $\frac{1}{c} < \frac{1}{a}$;

ბ) $d - b \leq 0$;

გ) $(b - a) \cdot c > 0$;

დ) $a - d = b - c$.

18. p -ს რომელი მნიშვნელობისთვის იქნება:

ა) $p^2 + 12$;

ბ) $(p - 2,7)^2 + 1,1$.

გამოსახულების მნიშვნელობა უმცირესი?

რა არის ეს უმცირესი მნიშვნელობა?

19. შეიძლება თუ არა $a^2 + 10\frac{5}{9}$ გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა იყოს:

ა) $26\frac{5}{9}$;

ბ) $2\frac{8}{17}$;

გ) 0;

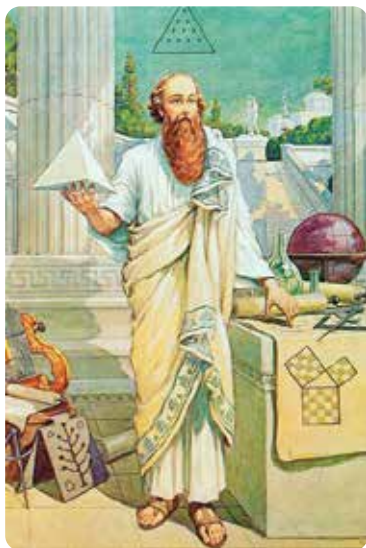
დ) 10,09.



რას შეძლებთ:

● გამოიყენოთ არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებები, რათა შედარებით მარტივად გამოთვალოთ გამოსახულების მნიშვნელობა;

● გამოსახულების გამარტივების მიზნით გახსნათ ფრჩხილები განრიგებადობის თვისების გამოყენებით, გახსნათ ფრჩხილები ფრჩხილების გახსნის წესის გამოყენებით, გამოიტანოთ საერთო მამრავლი ფრჩხილებს გარეთ.



პითაგორა კროტონელი
(ძვ.წ. 580-500 წ.წ.)
უდიდესი ბერძენი
მათემატიკოსი.
მხატვარი: ჯონ აუგუსტუს
კნაპი, 1926 წ.

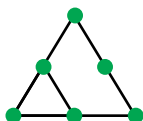
პითაგორელების აზრით, რიცხვები იყოფა ორ ჯგუფად: კეთილად და ბოროტად, ბედნიერებისა და უბედურების მომტანად.

მათვე დაყვეს ნატურალური რიცხვები ლუნ და კენტ რიცხვებად. ასევე სრულყოფილ და არასრულყოფილ, მარტივ და შედგენილ, მეგობრულ, სამკუთხა, კვადრატულ, ხუთკუთხა და ა.შ. რიცხვებად.

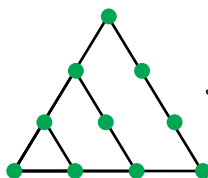
პითაგორელებს რიცხვები წერტილების სახით ჰქონდათ წარმოდგენილი. მათთვის რიცხვი „სამი“ სიმყარისა და სიმტკიცის გამომხატველი სიმბოლო იყო.



სიბრტყეზე აღებული სამი წერტილის მონაკვეთების შეერთებით ვღებულობთ სამკუთხედს.

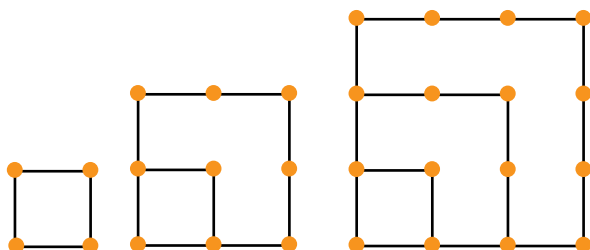


ექვსწერტილოვანი სამკუთხედი.

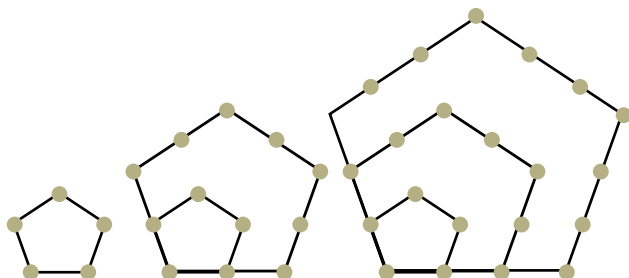


ათწერტილოვანი სამკუთხედი.

რიცხვებს 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... სამკუთხა რიცხვები ეწოდება.



4, 9, 16, ... კვადრატული რიცხვებია.



5, 12, 22, ... ხუთკუთხა რიცხვებია.

მრავალკუთხა რიცხვებს ფიგურულ რიცხვებს უწოდებენ.



მოცემული თავის დამატებითი
ელექტრონული რესურსები
იხილეთ QR-კოდზე.



I თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ:

ა) $10\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}$;

ბ) $6\frac{1}{5} + 1\frac{1}{3}$;

გ) $4\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{7}$;

დ) $4\frac{1}{4} : (\frac{1}{4} + \frac{3}{5})$;

ე) $4\frac{3}{5} - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + 3\frac{2}{5} \cdot 1\frac{3}{17} + 9 : \frac{9}{10}$;

ვ) $\frac{3+\frac{3}{7} \cdot 2\frac{1}{3}}{1\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{22} + 2} + 2$;

ზ) $1\frac{1}{3} \cdot (8\frac{2}{3} : 1\frac{4}{9} - 3\frac{3}{8} + 1\frac{5}{8}) - 1\frac{5}{6}$;

თ) $(3\frac{1}{15} - 1\frac{1}{15} : 1\frac{3}{5} + \frac{2}{5}) \cdot (3\frac{1}{7} - \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}) - \frac{1}{7}$.

2. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5}$;

ბ) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot \dots \cdot 1\frac{1}{98} \cdot 1\frac{1}{99}$.

3. შეასრულეთ მოქმედებები:

ა) $4,738 + 4,8$;

ბ) $6,8346 + 12,837$;

გ) $72,637 - 9,6$;

დ) $18 - 2,7365$;

ე) $1,3 \cdot 1,02$;

ვ) $5,7 \cdot 3,6$;

ზ) $1,203 : 0,3$;

თ) $2,21 : 0,65$.

4. გამოთვალეთ:

ა) $0,8 + 1\frac{1}{5} + 0,5 : 0,75 - 0,2 : (0,21 - \frac{1}{100})$;

ბ) $(5,6 - 2,35) \cdot 5\frac{1}{3} + 0,64 : 0,008$.

5. ჩაწერეთ რიცხვითი გამოსახულების სახით და გამოთვალეთ:

ა) 3,2 და $1\frac{1}{4}$ რიცხვების ნამრავლისა და $\frac{1}{2}$ -ის ჯამი;

ბ) 4,8 და $\frac{22}{5}$ რიცხვების სხვაობისა და 0,75-ის ნამრავლი.

6. იპოვეთ $a+3b$ გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ:

ა) $a=3,4$; $b=\frac{2}{3}$; ბ) $a=1,28$; $b=\frac{7}{12}$; გ) $a=1\frac{4}{7}$; $b=\frac{16}{21}$.

7. თუ $k=\frac{2}{5}$, მაშინ $1-k$; $\frac{1}{k}$; k^2 . დაალაგეთ კლების მიხედვით.

8. დაამრგვალოთ:

ა) ერთეულებამდე: 3,24; 5,923; 6,764; 2,002; 4,1;

ბ) მეათედებამდე: 4,24; 7,345; 3,097; 12,2903;

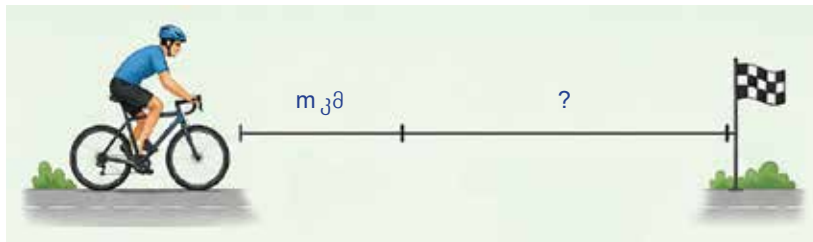
გ) მეასედებამდე : 2,347; 4,3746; 29,737; 2,030405;

დ) მეათასედებამდე: 2,32938; 27,37903; 634,2736; 74,12372.

9. იპოვეთ:

- ა) 360-ის $\frac{5}{6}$ -ის $\frac{2}{5}$ ნაწილი; ბ) 240-ის $\frac{3}{8}$ -ის $\frac{7}{9}$ ნაწილი;
გ) 1200-ის $\frac{7}{16}$ -ის $\frac{4}{35}$ ნაწილი; დ) 5400-ის $\frac{1}{9}$ -ის 0,23 ნაწილი.

10. მოგზაურმა პირველ დღეს 14,5 კმ გაიარა, რაც $1\frac{1}{4}$ კმ-ით ნაკლებია მეორე დღეს გავლილ მანძილზე და 800 მეტრით მეტი მესამე დღეს გავლილ მანძილზე. რამდენი კილომეტრი გაიარა მოგზაურმა სამი დღის განმავლობაში?
11. ველოსიპედისტმა m კმ გაიარა, რაც მთელი გზის $\frac{1}{3}$ ნაწილია. რა სიჩქარით უნდა გააგრძელოს გზა, რომ დარჩენილი მანძილი 3 სთ-ში გაიაროს?



12. მას შემდეგ, რაც ქეთევანმა შეიძინა 5 ცალი 80-თეთრიანი კალამი და 3 ცალი 2,5-ლარიანი რვეული, ხურდა დარჩა n ლარი. რა თანხა ჰქონდა ქეთევანს თავდაპირველად?
13. არსებობს თუ არა წიგნი, რომლის გვერდების გადასანომრად საჭიროა ზუსტად 858 ციფრი?
14. თამარს ანაზე 2-ჯერ მეტი ფანქარი აქვს. თამარმა თავისი ფანქრების რა ნაწილი უნდა აჩუქოს ანას, რომ ორივე მათგანს თანაბარი რაოდენობის ფანქარი გაუხდეს?
15. მონაცემთა ცენტრმა მეხსიერება სამ სერვერზე გაანაწილა. პირველ სერვერზე გადაიტანა მთელი მეხსიერების $\frac{1}{5}$ ნაწილი, მეორე სერვერზე — დარჩენილი მეხსიერების $\frac{1}{3}$ ნაწილი, ხოლო მესამე სერვერზე გადაიტანა 240 TB, რაც დარჩენილი მეხსიერების 0,75 ნაწილია. რამდენი ტერაბიტის მოცულობის მეხსიერება იყო მონაცემთა ცენტრში თავდაპირველად.



16. მარიამმა 9 ამოცანა ამოხსნა, თუმცა დავალების $\frac{2}{5}$ ნაწილი კიდევ შესასრულებელი აქვს. რამდენი ამოცანა აქვს მარიამს დავალებად?
17. იპოვეთ $A \cup B$ და $A \cap B$, თუ:
- $A = \{2; 5; 15; 20\}$ და $B = \{2; 4; 15\}$;
 - $A = \{0, 7; 3, 1; 100\}$ და $B = \{0, 7; 2; 26\}$;
 - $A = \{\frac{1}{2}; 5, 5; 23\frac{7}{23}; 50\}$ და $B = \{0, 5; \frac{11}{2}; 50\}$;
 - $A = \{1; 11; 111; 1111\}$ და $B = \{2; 22; 222\}$.
18. თუ $M \cap N = N$, მაშინ ჩამოთვლილთაგან რომელი დასკვნაა აუცილებლად ჭეშმარიტი?
- $M = N$;
 - $M \subset N$;
 - $N \subset M$;
 - $M \cap N = \emptyset$.
19. დაასახელეთ სიმრავლე:
- რომელიც ყველა სიმრავლის ქვესიმრავლეა;
 - რომელსაც მხოლოდ 2 ქვესიმრავლე აქვს.
20. A სიმრავლე 50 ელემენტიანია, B სიმრავლე – 37 ელემენტიანი, $A \cup B$ სიმრავლე კი – 63 ელემენტიანი. რამდენ ელემენტს შეიცავს $A \cap B$ სიმრავლე?
21. შეადარეთ და ახსენით, რა განსხვავებაა $\emptyset$ -სა და $\{\emptyset\}$ -ს შორის.
22. შეიძლება თუ არა ერთდროულად შესრულდეს პირობები: $M \subset N$ და $N \subset M$?
23. მოიყვანე ორი ისეთი სამეწეშენტიანი სიმრავლის მაგალითი, რომელთა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლესთან თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.
24. სპორტულ ბანაკში 36 ბავშვი ფეხბურთს თამაშობს, 29 ბავშვი – კალათბურთს, ხოლო 5 ბავშვი სპორტის ორივე სახეობითაა გატაცებული. რამდენი ბავშვია ბანაკში, თუ ცნობილია, რომ თითოეული მათგანი სპორტის ამ ორი სახეობიდან ერთს მაინც თამაშობს.



25. პირველი 100 ნატურალური რიცხვიდან ლევანმა ყოველი მეოთხე ამოწერა, ხოლო აკაკიმ – ყოველი მეხუთე. რამდენი რიცხვი ამოწერა ლევანმა? აკაკიმ? რამდენი რიცხვი არ ამოწერა არცერთმა ბავშვმა?
26. რამდენი სამედიანტიანი ქვესიმრავლე აქვს $T = \{0; 0,3; 3; 33\}$ სიმრავლეს?
27. შეასრულეთ მოქმედებები:
- ა) $(-2\frac{1}{24} - \frac{5}{6} - 1\frac{1}{8}) \cdot 96$; ბ) $1324 \cdot 726 + 1324 \cdot 274 - 324 \cdot 1000$;
 გ) $4,32 \cdot 100,58 - 0,58 \cdot 4,32$; დ) $(1\frac{3}{11} - 2\frac{1}{5}) \cdot (-55)$.
28. თუ $m = -3$ და $n = -1,4$, მაშინ რას უდრის:
- ა) $m - n$; ბ) $-m + (-n)$; გ) $m^2 - (-n)$; დ) $2m + n^2$.
29. გაამარტივეთ გამოსახულება:
- ა) $13x - (6 - x)$; ბ) $2y - 3(y - 2)$; გ) $3m - 2(-m) + 1$.
30. რიცხვით ღერძზე მოცემულია A და B წერტილები, იპოვეთ AB მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატი, თუ:
- ა) A(-8) და B(2); ბ) A(-11) და B(-3);
 გ) A(-2,5) და B(3,5); დ) A(-9) და B(5).
31. მოცემულია $Q\{-3; -2; 32\}$, დაწერეთ Q სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე.
32. რიცხვით ღერძზე მონიშნულია M(-4) და K(8) წერტილები. MK მონაკვეთზე იპოვეთ იმ წერტილის კოორდინატი, რომელიც 5-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული M წერტილიდან, ვიდრე K წერტილიდან.
33. გამოიანგარიშეთ:
- ა) $(3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{3} - 1,5) : (-10\frac{7}{12}) - (-2,6)$; ბ) $(-4,5 - 1\frac{1}{3} + |-\frac{1}{3}|) \cdot (-2)^2$;
 გ) $(\frac{11}{14} - \frac{5}{6}) : (0,75 - \frac{11}{14})$; დ) $(2\frac{1}{2} - 3,1) \cdot 4\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{14} + 0,4$;
 ე) $\frac{(3,2 - 4,5) \cdot 2 + 1,4}{2}$; ვ) $(3,5 - 0,25 : \frac{1}{12}) : 2 + 0,75$.
34. იპოვეთ x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სამართლიანია ტოლობა:
- ა) $|x+2| = -3$; ბ) $|x-4| = 0$; გ) $|x-2,5| = 3,5$; დ) $||x|-2| = 3$.
35. შეაერთეთ მსგავსი წევრები:
- ა) $-12x - 2x$; ბ) $-8y + 12y$;
 გ) $2,5z - 3,9z$; დ) $-\frac{2}{7}t - \frac{1}{3}t$;
 ე) $-2,8mn + 1,9mn - 2,6mn$; ვ) $-1\frac{4}{9}pq - 0,5pq + 2\frac{1}{4}pq$;
 ზ) $-2,8ab - 9ab + 11\frac{4}{5}ab$; თ) $abc - 8,43abc$.

36. მოცემულია $A=\{-2; -0,3; 0; 12\}$; $B=\{0; 1; 18; 28\}$ და $C=\{-2; -0,3; 18; 28\}$. იპოვეთ:
 ა) $A \cap B$; ბ) $A \cup C$; გ) $A \cap B \cap C$; დ) $A \cup B \cup C$.
37. x -ის რა მთელი მნიშვნელობისთვის იქნება $|x+1,4|+|x+2,6|$ გამოსახულების მნიშვნელობა უმცირესი?
38. თუ $abc > 0$ და ცნობილია, რომ $ab < 0$; $ac < 0$, მაშინ ჩამოთვლილთაგან რომელია აუცილებლად ჭეშმარიტი?
 ა) $a < 0$; ბ) $a + c \leq 0$; გ) $\frac{b}{c} > 0$; დ) $a + b + c = 0$.
39. რომელ ორ მომდევნო მთელ რიცხვს შორის არის მოთავსებული

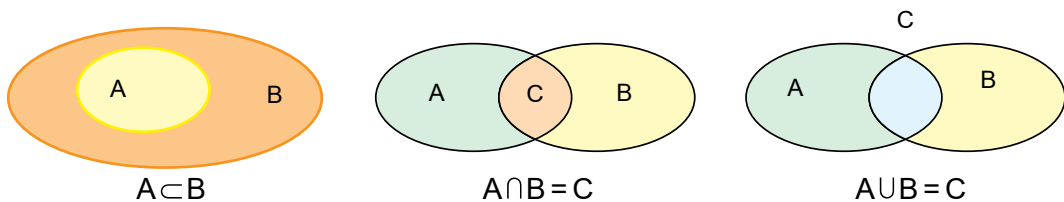
$$\frac{3,5 \cdot (-\frac{1}{7}) - 3 : \frac{6}{7} + 1,3}{-0,02}$$
 გამოსახულების მნიშვნელობა?
40. გაამარტივეთ გამოსახულება და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა:
 ა) $-(2x - 3y - 1) - (-3 - 3x - 2y)$, თუ $x + 5y = -4\frac{5}{7}$;
 ბ) $+(2,4a - 3,6b) - 1,2a - (-2,4b)$, თუ $a - b = 0,004$.
41. ახალციხეში დილის 6 საათზე ჰაერის ტემპერატურა იყო -3°C . 14 საათამდე ტემპერატურა ყოველ საათში თანაბრად ა) $0,5^{\circ}\text{C}$ -ით; ბ) $1,1^{\circ}\text{C}$ -ით იზრდებოდა. რა იქნებოდა ჰაერის ტემპერატურა დილის 10 სთ-ზე? 14 საათზე?
42. თუ $A = \{-2; 0; 2; 3\}$ და $B = \{-2; -1\}$, რამდენი ელემენტისგან შედგება
 ა) $A \cup B$; ბ) $A \cap B$.
43. იპოვეთ უმცირესი მთელი რიცხვი, რომლის მოდული:
 ა) 5-ზე ნაკლებია; ბ) 8-ზე ნაკლებია;
 გ) 15,9-ზე ნაკლებია; დ) 100,01-ზე ნაკლებია.
44. შეადგინეთ რიცხვითი გამოსახულება და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა:
 ა) $\frac{3}{8}$ -ისა და $\frac{2}{5}$ -ის ჯამის განაყოფი $-6\frac{1}{5}$ -ზე;
 ბ) 32,4-ისა და $-3\frac{1}{3}$ -ის ნამრავლი გაზრდილი $-2\frac{1}{5}$ -ით.
45. თუ $m > 0$, $n < 0$, შეადარეთ ნულს:
 ა) mn ; ბ) $\frac{m}{n}$; გ) $m - mn$;
 დ) $\frac{-m}{n^2}$; ე) $\frac{m}{n} \cdot (n - m)$.
46. როგორ შეიცვლება სხვაობის მნიშვნელობა, თუ:
 ა) საკლებს გაზრდით 3-ით, მაკლებს გაზრდით 3-ით;
 ბ) საკლებს გაზრდით 4,5-ით, მაკლებს გაზრდით 2,5-ით;
 გ) საკლებს შეამცირებთ 1,7-ით, მაკლებს გაზრდით 3,2-ით;
 დ) საკლებს შეამცირებთ 4,6-ით, მაკლებს შეამცირებთ 1,3-ით?

47. $A = \{-2; -5\frac{1}{3}; -6,1; -0,6\}$ სიმრავლის რამდენი ელემენტი აკმაყოფილებს პირობას?
 ა) მეტია -3 -ზე;
 ბ) ნაკლებია -6 -ზე;
 გ) მოთავსებულია -8 -სა და -5 -ს შორის;
 დ) ნაკლებია თავის შებრუნებულზე.
48. დაადგინეთ, რით განსხვავდებიან ერთმანეთისგან:
 ა) $a - b$ და $b - a$; ბ) $|a - b|$ და $|b - a|$; გ) $(a - b)^2$ და $(b - a)^2$.
49. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:
 ა) $|-84| : |3 + 4|$; ბ) $|4 \cdot 25| : |-2,5| + |-10|$;
 გ) $|-4,2| - |-3\frac{5}{6}| + |2|$; დ) $|-7,72| - |3,22| + |4\frac{7}{8}|$;
 ე) $|(-2,4 \cdot 3 + |-8,4|)| + 1$; ვ) $-|-3 \cdot \frac{10}{3} + 2| : |-120 : (-30)|$;
 ზ) $|-1\frac{2}{15} + 6\frac{1}{12}| - |1\frac{7}{20} - \frac{19}{30}|$.
50. იპოვეთ უმცირესი ორნიშნა რიცხვისა და უდიდესი ოთხნიშნა რიცხვის სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა.
51. დაალაგეთ ზრდის მიხედვით x , $-x$, x^2 , $-\frac{1}{x}$, თუ:
 ა) $x = 2$; ბ) $x = -2$; გ) $x = -\frac{1}{2}$.
52. იპოვეთ:
 ა) $0,15$ -ისა და $1\frac{1}{2}$ -ის შებრუნებული რიცხვების ნამრავლი;
 ბ) $3,25$ -ისა და $4\frac{1}{3}$ -ის სხვაობის მოპირდაპირე რიცხვი;
 გ) რამდენჯერაა მეტი $2\frac{3}{5}$ -ისა და $\frac{15}{26}$ -ის ნამრავლის შებრუნებული რიცხვი მათი შებრუნებული რიცხვების ნამრავლზე?
53. რიცხვით ღერძზე იპოვეთ ყველა იმ წერტილის კოორდინატი, რომელიც 3-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული A წერტილიდან, ვიდრე B წერტილიდან, თუ:
 ა) $A(-5)$; B(3); ბ) $A(-5,3)$; B(-2,9).
54. რამდენიმე დადებითი რიცხვის ჯამია 1. შეიძლება თუ არა მათი კვადრატების ჯამი 1-ზე ნაკლები იყოს? დადებითი პასუხის შემთხვევაში მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითი.
55. იპოვეთ x -ის ყველა მთელი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $|x - 3| + |x + 5| < 8$.
56. t -ს რამდენი ნატურალური მნიშვნელობისთვისაა სამართლიანი $-12,3 \leq -2,1t \leq -5$ უტოლობა.



I თავის მოკლე მიმოხილვა

- **სიმრავლე** პირველადი ცნებაა, იგი არ განიმარტება. ტერმინ სიმრავლეს მათემატიკაში იყენებენ სხვადასხვა ობიექტის ერთობლიობის აღსანიშნავად.
- ობიექტებს, რომელთა ერთობლიობასაც სიმრავლე წარმოადგენს, ამ **სიმრავლის ელემენტები** ეწოდება.
- **ცარიელი სიმრავლე** ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს და აღინიშნება $\emptyset$ სიმბოლოთი.
- **A და B სიმრავლეები ტოლია და ჩავენართ $A=B$** , თუ ეს სიმრავლეები შედგება ერთი და იმავე ელემენტებისგან.
- **A სიმრავლეს B სიმრავლის ქვესიმრავლე** ეწოდება და წერენ $A \subset B$, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლის ელემენტიცაა.
- ცარიელი სიმრავლე არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე: $\emptyset \subset A$.
- **A და B სიმრავლეთა თანაკვეთა** არის მათი საერთო ელემენტებისაგან შედგენილი სიმრავლე.
- **A და B სიმრავლეთა გაერთიანება** არის ისეთი C სიმრავლე, რომელიც შეიცავს როგორც A სიმრავლის, ასევე B სიმრავლის ყველა ელემენტს და მხოლოდ მათ.



ვილერ-ვენის დიაგრამები

- წრფეს, რომელზეც შერჩეულია ათვლის სათავე, ერთეულოვანი მონაკვეთი და დადებითი მიმართულება, **რიცხვითი ღერძი** ეწოდება.
- რიცხვებს, რომელთა შესაბამისი წერტილები დადებით სხივზე მდებარეობს, **დადებითი რიცხვები** ეწოდებათ. ხოლო უარყოფით სხივზე მდებარე წერტილთა შესაბამის რიცხვებს – უარყოფითი რიცხვები.
- რიცხვს, რომელსაც რიცხვითი ღერძის მოცემული წერტილი შეესაბამება, ამ **წერტილის კოორდინატი** ეწოდება და აღინიშნება ასე: $A(a)$.
- რიცხვითი ღერძის ათვლის სათავიდან მოცემული რიცხვის გამომსახველ წერტილამდე მანძილს ამ **რიცხვის მოდული**, ანუ აბსოლუტური სიდიდე ეწოდება. **a** რიცხვის მოდული აღინიშნება ასე: $|a|$.
- ნებისმიერი რიცხვის მოდული არაუარყოფითი რიცხვია;
- მოპირდაპირე რიცხვების მოდულები ტოლია;
- არაუარყოფითი რიცხვის მოდული თვით ამ რიცხვის ტოლია;
- უარყოფითი რიცხვის მოდული მისი მოპირდაპირე რიცხვია.

თავი II

გეომეტრიული ფიგურები. წრფეთა ურთიერთმდებარეობა. კუთხე



შეისწავლით:

- გეომეტრიულ ფიგურებს; პირველად ცნებებს; წერტილებისა და წრფეების ურთიერთმდებარეობის შემთხვევებს;
- მონაკვეთის, სხივის, ნახევარსიბრტყის განმარტებებს;
- კუთხის, კუთხის ბისექტრისის ცნებებს; მოსაზღვრე და ვერტიკალურ კუთხეებს და მათ თვისებებს;
- პარალელურ წრფეთა თვისებებს და ნიშნებს.

შეძლებთ:

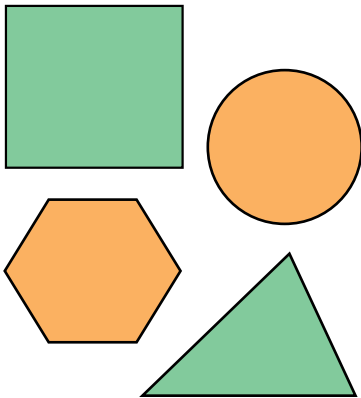
- გარე სამყაროში გეომეტრიული ფიგურების ამოცნობას და მათ დახასიათებას.
- მოცემული ტექსტის შესაბამისი ნახაზის შედგენას.
- ზოგიერთ შემთხვევაში: კუთხეების გრადუსული ზომის პოვნას.
- მონაკვეთისა და მისი ნაწილების სიგრძეების პოვნას.
- იმის დადგენას, განსხვავებული წრფეები არიან პარალელურები, თუ იკვეთებიან და მათ შორის კუთხის დადგენას.

1. გეომეტრიული ფიგურები

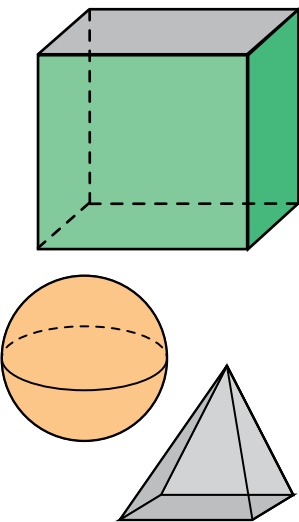


მიზანი:

- გავიგოთ, რას ნიშნავს და რას სწავლობს გეომეტრია;
- შევძლოთ გეომეტრიული ფიგურის ცნების განმარტება;
- ამოვიცნოთ რეალურ ცხოვრებაში გეომეტრიული ფიგურები და შევძლოთ მათი დახასიათება;
- გავარჩიოთ პირველადი (საწყისი) ცნებები: წერტილი, წრფე, სიბრტყე;
- გავიგოთ, რა არის აქსიომა.



გეომეტრიის იმ ნაწილს, რომელიც ბრტყელ ფიგურებს შეისწავლის, **პლანიმეტრია** ეწოდება.



გეომეტრიის იმ ნაწილს, რომელიც სივრცულ ფიგურებს შეისწავლის, **სტერეომეტრია** ეწოდება.

ჩვენ ვინყებთ მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ნაწილის – გეომეტრიის შესწავლას.

გეომეტრია შეისწავლის გეომეტრიულ ფიგურებს, მათ თვისებებს და იმას, თუ როგორ არიან ეს ფიგურები ერთმანეთთან დაკავშირებული.

სიტყვა „გეომეტრია“ ბერძნული წარმოშობისაა და ნიშნავს მიწის გაზომვას (გეო – მიწა, მეტრია – გაზომვა).

მიწის გაზომვა ადამიანებს ჯერ კიდევ ძალიან ძველ დროში სჭირდებოდათ. მაგალითად, ძველ ეგვიპტეში მდინარე ნილოსის ადიდების შემდეგ მიწის ნაკვეთების საზღვრები ხშირად იშლებოდა და საჭირო ხდებოდა მათი ხელახლა განსაზღვრა. ასეთი პრაქტიკული საჭიროება იყო გეომეტრიის განვითარების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ფაქტორი, მაგრამ არა მისი ერთადერთი საწყისი.

გეომეტრია თანდათან ჩამოყალიბდა ცივილიზაციაში პრაქტიკული საჭიროებების – მშენებლობების, მიწათმზომელობის, ასტრონომიისა და ინჟინერიის საფუძველზე, ხოლო ძველმა ბერძნებმა მას მკაცრი ლოგიკური და თეორიული სახე მისცეს.

დღეს გეომეტრია გვხვდება თითქმის ყველაფერში, რაც ჩვენ გარშემოა – შენობებში, გზებში, სხვადასხვა საგნის ფორმებში. ამიტომ გეომეტრია მნიშვნელოვან როლს ასრულებს თანამედროვე ცხოვრებაში და ფართოდ გამოიყენება მეცნიერებასა და ტექნოლოგიებში.

ამ თავში ჩვენ გავეცნობით **გეომეტრიის საყრდენ ცნებებს**, რომლებიც დაგვეხმარება მომდევნო თემების უკეთ გაგებაში.

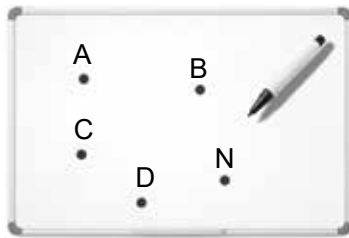
დავიწყოთ იმით, რომ

წერტილთა ნებისმიერ სიმრავლეს გეომეტრიული ფიგურა ეწოდება.

წინა კლასებიდან თქვენ უკვე იცნობთ ზოგიერთ გეომეტრიულ ფიგურას, მაგალითად: **წრფე, წრენირი, სამკუთხედი, ოთხკუთხედი, კუბი ...**

მაგალითად, სამკუთხედს სამი გვერდი და სამი კუთხე აქვს. მაგრამ დავფიქრებულვართ კი: რა არის გვერდი? რა არის კუთხე? როგორ შეიძლება მათი განმარტება?

მათემატიკაში ახალი ცნების განსაზღვრისას ხშირად ვიყენებთ უკვე ცნობილ ცნებებს. თუმცა საბოლოოდ მივდივართ ისეთ ცნებამდე, რომლის განმარტებაც სხვა ცნებების საშუალებით აღარ შეგვიძლია. ასეთ ცნებებს **პირველად (საწყის) ცნებებს** ვუწოდებთ.



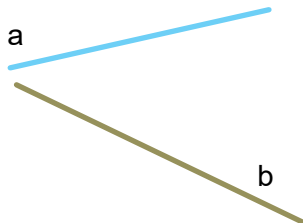
წერტილი – უმარტივესი გეომეტრიული ფიგურაა

წერტილი, წრფე, სიბრტყე პირველადი ცნებებია.

თითოეულ მათგანზე მხოლოდ წარმოდგენის შექმნა შეგვიძლია. მაგალითად, წერტილზე წარმოდგენას გვაძლევს დაფაზე მარკერის, ან ფურცელზე ფანქრის შეხება.

წერტილს არ აქვს სიგრძე, სიგანე ან სისქე – იგი მხოლოდ მდებარეობით განისაზღვრება. ჩვეულებრივ, წერტილებს აღვნიშნავთ ლათინური ანბანის დიდი ასოებით, მაგალითად: A, B, C, D ...

წრფე ისეთი გეომეტრიული ფიგურაა, რომელზეც წარმოდგენას გვაძლევს გაჭიმული ძაფი, რომელიც ორივე მხარეს უსასრულოდ გრძელდება.



წრფეს არც დასაწყისი აქვს, არც დასასრული. ჩვეულებრივ, წრფეს აღვნიშნავთ ლათინური ანბანის პატარა ასოებით, მაგალითად: a, b, c ...

სიბრტყეზე წარმოდგენას გვაძლევს მაგიდის ან დაფის ზედაპირი, თუ მას ყოველი მიმართულებით უსასრულოდ გაგრძელებულად წარმოვიდგენთ.

ცნებების მსგავსად არის წინადადებები, რომელთა ჭეშმარიტებასაც დასაბუთების გარეშე მივიღებთ.

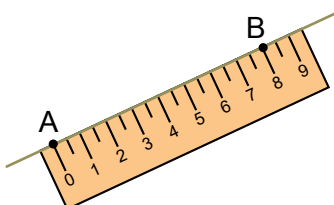
წინადადებას, რომლის ჭეშმარიტებას დაუმტკიცებლად ვღებულობთ, **აქსიომა** ეწოდება.

მაგალითად, ერთი ასეთი თვალნათელი წინადადება ანუ აქსიომაა, რომ

ნებისმიერი წრფისთვის არსებობს მასზე მდებარე და მასზე არამდებარე წერტილები.

ავიღოთ ორი A და B წერტილი. რამდენი წრფის გავლება შესაძლებელი ამ ორ წერტილზე?

ეს პრაქტიკულად შეგიძლიათ ადვილად სცადოთ სახაზავის საშუალებით.



აქსიომა – ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს „აღიარების ღირს“.

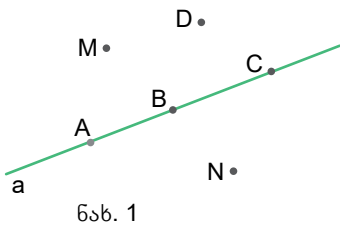
კიდევ ერთი აქსიომა:

ნებისმიერ ორ წერტილზე ერთადერთი წრფის გავლება შეიძლება.

ე.ი. ორი განსხვავებული წერტილი ყოველთვის განსაზღვრავს ერთ გარკვეულ წრფეს. სწორედ ამიტომ, გეომეტრიაში ხშირად იყენებენ ორ წერტილს წრფის აღსანიშნავად. მაგალითად, თუ წრფეზე მდებარეობს ორი, A და B , წერტილი, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ გვაქვს მოცემული AB წრფე (შეიძლება ჩავწეროთ BA წრფე).

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია a წრფე.

A წერტილი ეკუთვნის a წრფეს – ვწერთ: $A \in a$, ხოლო D წერტილი არ ეკუთვნის a წრფეს – ჩავწეროთ: $D \notin a$.

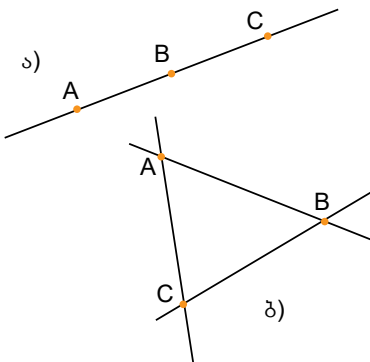


ნახ. 1

ნახ. 1-ზე ვხედავთ, რომ $A \in a$; $B \in a$; $C \in a$; $D \notin a$; $M \notin a$; $N \notin a$. AB ; BA ; BC ; CB ; AC ; CA – ექვსი სხვადასხვა ჩანაწერია, რომელიც გულისხმობს ერთ წრფეს, კერძოდ a წრფეს.

ამოცანა 1.

სიბრტყეზე ავიღოთ სამი განსხვავებული A , B და C წერტილი. რამდენი განსხვავებული წრფის გავლება შეიძლება წყვილ-წყვილად აღებულ ამ წერტილებზე?



ნახ. 2

ამოხსნა

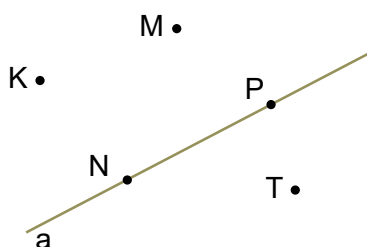
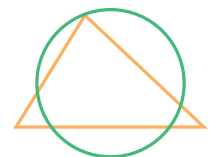
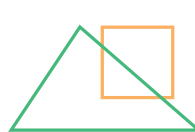
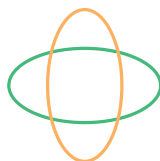
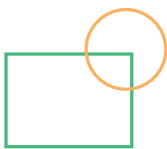
გავავლოთ AB წრფე. თუ C წერტილი AB წრფეზე აღმოჩნდება, მაშინ A , B და C წერტილებზე მხოლოდ ერთი წრფის გავლება იქნება შესაძლებელი (ნახ. 2ა). ხოლო თუ A , B და C წერტილები ერთ წრფეზე არ აღმოჩნდება, მაშინ AB წრფის გარდა კიდევ მივიღებთ AC და BC წრფეებს. ე.ი. მივიღეთ სულ სამი წრფე AB , AC და BC (ნახ. 2ბ).



1. რას ნიშნავს სიტყვა „გეომეტრია“?
2. რას წარმოადგენს გეომეტრიული ფიგურა?
3. დაასახელეთ თქვენთვის ცნობილი გეომეტრიული ფიგურები და დაახასიათეთ ისინი.
4. რას ნიშნავს სიტყვა „აქსიომა“?
5. დაასახელეთ წინადადებები, რომლებიც, თქვენი აზრით, თვალნათელია, ანუ დასაბუთებას არ საჭიროებს.

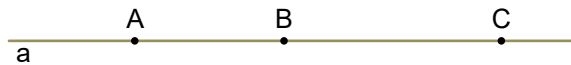


- სიბრტყეში გაავლეთ a წრფე. მასზე მონიშნეთ A და B წერტილები. ასევე, მონიშნეთ C, D, E წერტილები a წრფის გარეთ. გამოიყენეთ $\in$ და $\notin$ სიმბოლოები და ჩაწერეთ დამოკიდებულება A, B, C, D, E წერტილებსა და a წრფეს შორის.
- სიბრტყეზე მონიშნეს ოთხი წერტილი G, E, O და M . მათგან მხოლოდ სამი წერტილი G, E და O მდებარეობს ერთ წრფეზე. ამ ოთხი წერტილიდან ყოველ ორზე გაავლეს წრფე. სულ რამდენი განსხვავებული წრფე მიიღება?
- დახაზეთ ორი მონაკვეთი ისე, რომ მათი თანაკვეთა იყოს:
 - წერტილი;
 - მონაკვეთი.
- დახაზეთ ორი სამკუთხედი ისე, რომ მათი თანაკვეთა იყოს:
 - წერტილი;
 - მონაკვეთი;
 - სამკუთხედი;
 - ოთხკუთხედი.
- დახაზეთ ორი ოთხკუთხედი ისე, რომ მათი თანაკვეთა იყოს:
 - წერტილი;
 - მონაკვეთი;
 - სამკუთხედი;
 - ოთხკუთხედი.
- ჩამოთვლილი წინადადებებიდან რომელი შეიძლება მივიჩნიოთ აქსიომად?
 - ნელინადში 366 დღეა;
 - ხვალ კვირაა;
 - ნებისმიერი მონაკვეთი შეიძლება გაგრძელდეს უსასრულოდ ორივე მიმართულებით და მივიღებთ წრფეს;
 - ნებისმიერ სამ წერტილზე გაივლება ზუსტად ერთი წრფე.
- გადაიხაზეთ ნახაზი ორჯერ და გააფერადეთ მოცემული ფიგურების
 - თანაკვეთა;
 - გაერთიანება.
 მიღებული ფიგურებიდან (თანაკვეთა, გაერთიანება), რომელია თქვენთვის ცნობილი გეომეტრიული ფიგურა?



- ნახაზზე მოცემულია a წრფე და M, N, P, K, T წერტილები. სიმბოლოების მეშვეობით ჩაწერეთ აღნიშნული წერტილებისა და a წრფის ურთიერთმდებარეობა.

9. ნახაზის მიხედვით წაიკითხეთ a წრფე ორი ასოთი. a წრფის წაკითხვის რამდენი ვარიანტი არსებობს?



10. ცნობილია, რომ a წრფე გადის A წერტილზე და არ გადის B წერტილზე. შეადგინეთ შესაბამისი ნახაზი და სიმბოლოების საშუალებით ჩაწერეთ a წრფისა და A და B წერტილების ურთიერთმდებარეობა.



გამეორება

11. დაწერეთ 5-დან 37-მდე მოთავსებულ:

- ა) ლუნ რიცხვთა სიმრავლე;
- ბ) 4-ის ჯერად რიცხვთა სიმრავლე;
- გ) იმ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც 6-ზე გაყოფისას ნაშთში 2-ს გვაძლევენ.

12. ქვემოთ მოყვანილი წინადადებებიდან, რომელია ჭეშმარიტი და რომელი მცდარი:

- ა) ნატურალური რიცხვები, რომელთა ბოლო ციფრია 0, იყოფა 5-ზე;
- ბ) 5-ზე იყოფა მხოლოდ 0-ით დაბოლოებული რიცხვები;
- გ) თუ a იყოფა 2-ზე, მაშინ $a+2$ გაიყოფა 4-ზე;
- დ) სამი მომდევნო რიცხვის ნამრავლი იყოფა 6-ზე.



რას შეძლებთ:

- გეომეტრიული ფიგურების განიმარტებას და მათ ურთიერთმდებარეობის დადგენას;
- ამოიცნობთ სხვადასხვა გეომეტრიულ ფიგურებს გარემოში და შეძლებთ ზოგიერთი მათგანის დახასიათებას.



ეს საინტერესოა

ქართული მათემატიკური სკოლა მსოფლიოში ერთ-ერთი გამორჩეულია. უმნიშვნელოვანესია ქართველი მათემატიკოსების დამსახურება გეომეტრიასა და მისი პრაქტიკული გამოყენების მიმართულებით. მათ დიდი წვლილი შეიტანეს იმაში, თუ როგორ აღვიქვამთ დღეს სივრცესა და ფიგურებს.

ქართული მათემატიკური სკოლის ერთ-ერთმა ფუძემდებელმა ნიკო მუსხელიშვილმა შექმნა უმნიშვნელოვანესი ნაშრომები, რომლებიც გეომეტრიულ მეთოდებს იყენებს ფიზიკური სხეულების მდგრადობის გამოსათვლელად. მისი აღმოჩენები დღესაც გამოიყენება ხიდების, გვირაბებისა და ცათამბჯენების მშენებლობაში. მან აჩვენა, თუ როგორ შეიძლება რთული გეომეტრიული ფორმების მქონე სხეულებზე ძალების განაწილების გამოთვლა.



ნიკოლოზ (ნიკო) მუსხელიშვილი (1891-1976)
გამოჩენილი ქართველი მათემატიკოსი და მექანიკოსი.

2. წრფეების ურთიერთმდებარეობა



მიზანი:

გავეცნოთ:

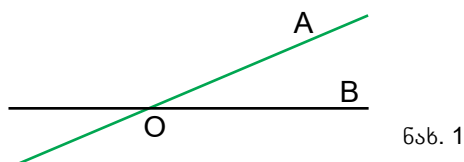
- წრფეების ურთიერთმდებარეობას სიბრტყეზე;
- სხივისა და დამატებითი სხივის ცნებებს.



სურათის მიხედვით, სად უნდა დადგეს შუქნიშანი, რომ მანქანებს არ ჰქონდეთ შეჯახების საშიშროება? უპასუხეთ კითხვას და ახსენით, რატომ.

დავადგინოთ, რამდენი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს ორ სხვადასხვა წრფეს.

განვიხილოთ OA წრფე (ნახ. 1). ცხადია, არსებობს B წერტილი, რომელიც ამ წრფეს არ ეკუთვნის. ამასთან, O და B წერტილებზე შეიძლება წრფის გავლება, ე.ი. ორ სხვადასხვა წრფეს შეიძლება ჰქონდეს ერთი საერთო წერტილი.



ნახ. 1

დავუშვათ არსებობს ორი, ერთმანეთისაგან განსხვავებული, a და b წრფე, რომელთაც საერთო, ორი A და B წერტილი აქვთ. ამ შემთხვევაში გამოვა, რომ ორ, A და B , წერტილზე გავლებულია ორი განსხვავებული – a და b წრფე, რაც, აქსიომის თანახმად, შეუძლებელია.

მაშასადამე,

ორ სხვადასხვა წრფეს ერთზე მეტი საერთო წერტილი არ შეიძლება ჰქონდეს.

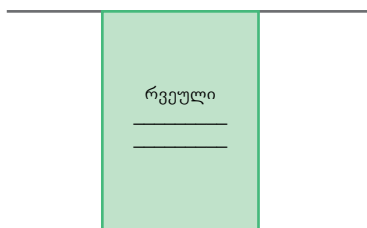
თუ ორ სხვადასხვა წრფეს ერთი საერთო წერტილი აქვს, ვამბობთ, რომ ეს წრფეები იკვეთება, ხოლო ამ წერტილს **გადაკვეთის წერტილი** ეწოდება.

როგორ ფიქრობთ, ყველა წრფე იკვეთება?

ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად წარმოვიდგინოთ რვეულის მოპირდაპირე კიდეებზე გამავალი წრფეები. ისინი ერთმანეთს არ გადაკვეთს.

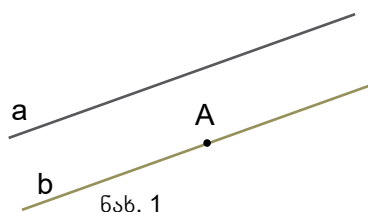
ერთ სიბრტყეში მდებარე ორ განსხვავებულ წრფეს **პარალელური წრფეები** ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთს.

a წრფე b წრფის პარალელურია – ჩაინერება ასე: $a \parallel b$.





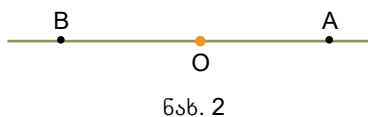
რეალობაში პარალელურ წრფეთა უამრავი მაგალითია – სადენები, მატარებლის ლიანდაგები, ვენახში ზვრები. დაამატეთ ამ ჩამონათვალს, კიდევ სად გვხვდება პარალელური წრფეები.



დახაზეთ a წრფე და მონიშნეთ A წერტილი (ნახ. 1), რომელიც ამ წრფეზე არ მდებარეობს. a წრფის პარალელური რამდენი წრფის გატარება შეიძლება A წერტილზე?

გავეცნოთ კიდევ ერთ აქსიომას:

წრფეზე არამდებარე წერტილზე შესაძლებელია ამ წრფის პარალელური ერთადერთი წრფის გავლება.

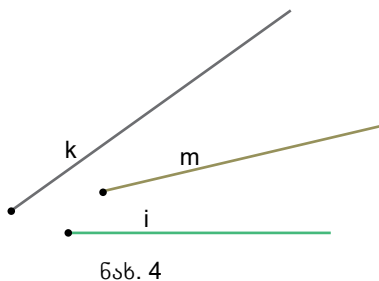
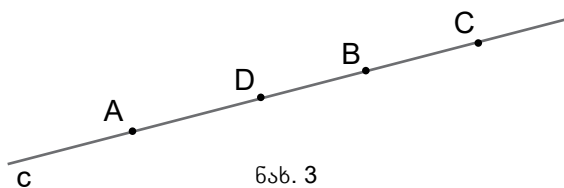


წრფეზე აღებული O წერტილი წრფეს ორ ნაწილად ყოფს (ნახ. 2). თითოეულ ნაწილს, O წერტილთან ერთად, **სხივი** ეწოდება, ხოლო O წერტილს – **სხივის სათავე**.

სხივი აღინიშნება ორი ასოთი, მაგალითად: OA სხივი და OB სხივი.

პირველი ასო აღნიშნავს სხივის სათავეს, ხოლო მეორე – სხივზე მდებარე ნებისმიერ სხვა წერტილს.

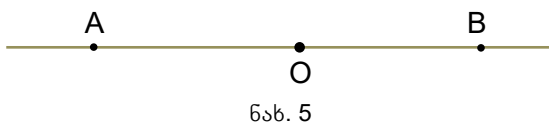
ნახ. 3-ზე AD ; AB და AC სხივები ერთსა და იმავე სხივს აღნიშნავს.



სხივები შეიძლება აღინიშნოს ლათინური ანბანის პატარა ასოებითაც, მაგალითად: m , i , k და ა.შ. (ნახ. 4)

ერთი წრფის ორ განსხვავებულ სხივს, რომელთაც საერთო სათავე აქვთ, **დამატებითი სხივები** ეწოდება.

OA და OB სხივები დამატებითი სხივებია (ნახ. 5).



კითხვაზე: „ამ წერტილებიდან რომელი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის?“ პასუხი მარტივია: O წერტილი მდებარეობს A და B წერტილებს შორის, ანუ

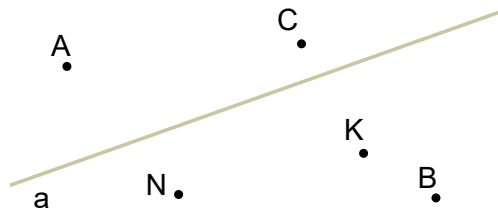
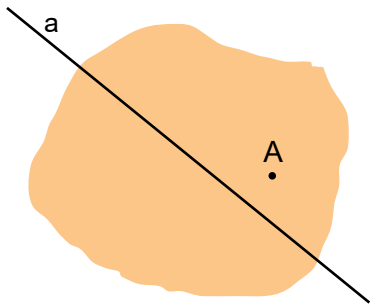
O წერტილი მდებარეობს A და B წერტილებს შორის, თუ OA და OB სხივები დამატებითი სხივებია.

როგორც წრფეზე დასმული წერტილი ყოფს ამ წრფეს ორ ნაწილად, ასევე სიბრტყეზე გავლებული ნებისმიერი წრფე სიბრტყეს ყოფს ორ ნაწილად.

სიბრტყეზე განვიხილოთ a წრფე, რომელიც სიბრტყეს ორ ნაწილად ყოფს. თითოეულ მათგანს a წრფესთან ერთად **ნახევარსიბრტყე** ეწოდება, ხოლო a წრფეს – **ნახევარსიბრტყის საზღვარი**.

ნახევარსიბრტყე აღინიშნება შემდეგნაირად: $(a;A)$, სადაც a არის ნახევარსიბრტყის საზღვარი, ხოლო A არის ამ ნახევარსიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წერტილი, რომელიც a წრფეზე არ მდებარეობს.

ნახაზზე მოცემულია ორი ნახევარსიბრტყე: $(a;A)$ და $(a;B)$.



აღნიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ $(a;A)$ და $(a;C)$ ერთი და იგივე ნახევარსიბრტყეა, ხოლო $(a;N)$, $(a;B)$ და $(a;K)$ ასევე ერთსა და იმავე ნახევარსიბრტყეს აღნიშნავს, რომელიც $(a;A)$ -სგან განსხვავებულია.



1. რა ურთიერთმდებარეობა შეიძლება ჰქონდეს სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს?
2. დაასახელეთ პარალელურ წრფეთა მაგალითები გარე სამყაროში;
3. რა აქვთ საერთო დამატებითი სხივებს?
4. A , D და C წერტილებიდან რომელი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის, თუ ცნობილია, რომ CA და CD სხივები დამატებითი სხივებია?
5. რას აღნიშნავს $(a;A)$ ნახევარსიბრტყის ჩანაწერში თითოეული ასო?
6. შეძლებთ წრფის გარეთ მდებარე წერტილზე ამ წრფის ორი პარალელური წრფის გატარებას? პასუხი ახსენით.



კვლევითი დავალება

დაათვალიერეთ თქვენი ოთახი ან საკლასო ოთახი. იპოვეთ მინიმუმ 10 წყვილი წრფე და თითოეული დაახასიათეთ: პარალელურია, იკვეთება, ან ემთხვევა ერთმანეთს. შედეგები წარმოადგინეთ ცხრილის სახით და დაწერეთ, რომელ შემთხვევაში შეგხვდათ თითოეული ტიპის წრფეთა წყვილი.



სავარჯიშოები



1. ნახაზზე მოცემულია a და b წრფეები. შეიძლება თუ არა ისეთი წრფის გავლება, რომელიც:

- ა) კვეთს როგორც a , ისე b წრფეს?
- ბ) კვეთს a -ს და არ კვეთს b -ს?
- გ) კვეთს b -ს და არ კვეთს a -ს?

2. სიბრტყეზე გაავლეს ორი პარალელური a და b წრფე. a წრფეზე შეარჩიეს წერტილი M და ამ წერტილზე, იმავე სიბრტყეში, გაავლეს მესამე წრფე c . გადაიკვეთებიან თუ არა a და c წრფეები? b და c წრფეები?

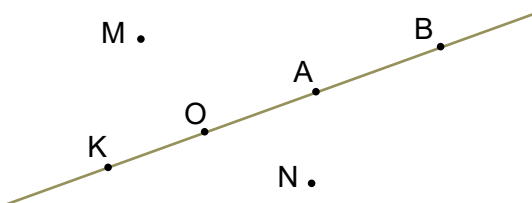
3. დახაზეთ 3 წრფე ისე, რომ მათ ჰქონდეთ:

- ა) გადაკვეთის ერთი წერტილი; ბ) გადაკვეთის ორი წერტილი;
- გ) გადაკვეთის სამი წერტილი; დ) გადაკვეთის არცერთი წერტილი.

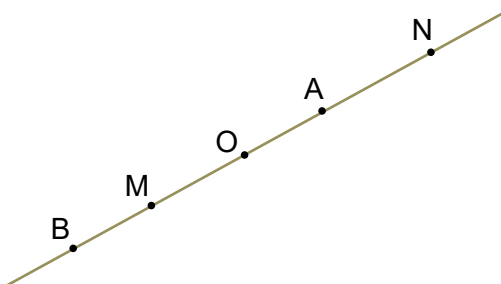
4. დახაზეთ a და b წრფეები, რომლებიც იკვეთება O წერტილში. გაავლეთ c წრფე, რომელიც კვეთს როგორც a , ისე b წრფეს. სულ რამდენი გადაკვეთის წერტილი მიიღება (განიხილეთ ყველა შესაძლო შემთხვევა).

5 რამდენ ნაწილად გაყოფს სიბრტყეს:

- ა) ორი პარალელური წრფე; ბ) ორი გადამკვეთი წრფე.

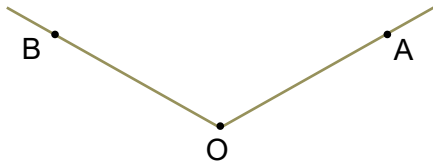


6. ნახაზზე მონიშნული წერტილებიდან, რომელი ეკუთვნის OA სხივს და რომელი არა? ამონერეთ დამატებითი სხივების ყველა წყვილი.



7. ნახაზის მიხედვით, დაადგინეთ ქვემოთ ჩამოთვლილი წინადადებებიდან რომელია ჭეშმარიტი და რომელია მცდარი:

- ა) M ეკუთვნის OA სხივს;
- ბ) M ეკუთვნის OB სხივს;
- გ) A ეკუთვნის OA სხივს;
- დ) N ეკუთვნის OB სხივს.



8. ნახაზზე მოცემულია საერთო სათავის მქონე OA და OB სხივები, რამდენ ნაწილად გაიყო სიბრტყე? წარმოადგენენ თუ არა OA და OB დამატებით სხივებს?

9. სიბრტყის M წერტილზე გაავლეს a, b, c და d განსხვავებული წრფეები. შესაძლებელია თუ არა, რომ a, b, c, d წრფეებიდან რომელიმე ორი იყოს ერთმანეთის პარალელური?

გამეორება

10. a ლუწი რიცხვია. ჭეშმარიტია, თუ მცდარი:

- ა) $a + 4$ ლუწი რიცხვია; ბ) $2a - 3$ ლუწი რიცხვია;
გ) $5a + 5$ კენტი რიცხვია; დ) $3a$ არის 6-ის ჯერადი?

11. დაასრულეთ წინადადება:

- ა) საკლები გაადიდეს 18-ით, მაკლები შეამცირეს 10-ით, მაშინ სხვაობა ... ;
ბ) საკლები გაადიდეს 20-ით, მაკლები გაადიდეს 20-ით, მაშინ სხვაობა ... ;
გ) გასაყოფი გაადიდეს 2-ჯერ, გამყოფი – 4-ჯერ, მაშინ განაყოფი ... ;
დ) გასაყოფი გაადიდეს 4-ჯერ, გამყოფი შეამცირეს 2-ჯერ, მაშინ განაყოფი ... ;
ე) I თანამამრავლი გაადიდეს 2-ჯერ, მეორე კი შეამცირეს 4-ჯერ, მაშინ ნამრავლი ... ;
ვ) I თანამამრავლი გაადიდეს k -ჯერ, II კი შეამცირეს k -ჯერ, მაშინ ნამრავლი

მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. გაავლეთ წრფე და მასზე მონიშნეთ A და B წერტილები. ამავე წრფეზე, A და B წერტილებს შორის, მონიშნეთ წერტილი C . დაადგინეთ, AB, BC, CA, AC, CB და BA სხივებიდან:

- ა) რომელი სხივები ემთხვევა ერთმანეთს?
ბ) რომელი სხივი წარმოადგენს CA სხივის დამატებით სხივს?
გ) გარდა სხივებისა, კიდევ რომელი გეომეტრიული ფიგურები მიიღება ნახაზზე?

რას შეძლებთ:

- განსაზღვროთ, როდის არიან წრფეები პარალელური, გადამკვეთი, ან როდის ემთხვევიან ერთმანეთს. ამოიცნობთ მათ რეალურ სამყაროში.

3. მონაკვეთი



მიზანი:

- გავეცნოთ მონაკვეთის, ტოლი მონაკვეთების ცნებებს;
- შევძლოთ მონაკვეთის სიგრძის პოვნა შესაბამისი მოცემულობებით;
- მიღებული ცოდნის გამოყენება პრაქტიკაში.



ლიზა და კატო ქუჩის ერთ მხარეს ცხოვრობენ, მათ სახლებს შორის იმავე ქუჩაზე მდებარეობს სკოლა. ლიზას სახლიდან სკოლამდე მანძილი არის 200 მეტრი, ხოლო კატოს სახლიდან სკოლამდე 400 მეტრია. რა მანძილი უნდა გაიაროს ლიზამ, რომ კატოს სახლამდე მივიდეს?



გავავლოთ წრფე და მოვნიშნოთ მასზე ორი განსხვავებული წერტილი M და N. როგორც ვიცით, ნებისმიერი წერტილი წრფეზე ორ სხივს განსაზღვრავს.

ზოგჯერ MN მონაკვეთს ასეც განმარტავენ: MN მონაკვეთი არის M და N წერტილების დამაკავშირებელი უმოკლესი გზა.

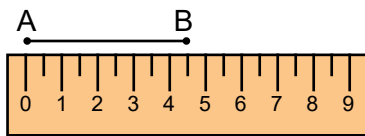
გაითვალისწინეთ, რომ მონაკვეთი MN და მონაკვეთი NM ერთი და იგივე მონაკვეთია.

გარდა სხივებისა, ასეთ შემთხვევაში მივიღებთ კიდევ ერთ გეომეტრიულ ფიგურას – წრფის ნაწილს, რომელიც შედგება M და N წერტილებისგან და მათ შორის მდებარე ყველა წერტილისგან. ამ ფიგურას **მონაკვეთი** ეწოდება. M და N წერტილებს **მონაკვეთის ბოლოები** ეწოდება. მონაკვეთი აღინიშნება მისი ბოლო წერტილებით. მაგალითად, MN მონაკვეთი ან NM მონაკვეთი.

თუ წერტილი მდებარეობს მონაკვეთის ბოლოებს შორის, მას მონაკვეთის **შიგა წერტილი** ვუწოდოთ.

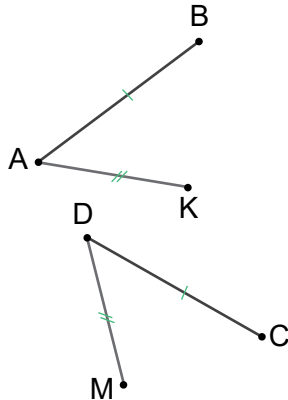
გავეცნოთ კიდევ ერთ **აქსიომას**:

ნებისმიერ მონაკვეთს გააჩნია სიგრძე, რომელიც დადებითი რიცხვით გამოისახება.



მონაკვეთის სიგრძის გაზომვა სახაზავით შეიძლება. ამისათვის სახაზავის ნულოვან დანაყოფს უნდა დავამთხვიოთ მონაკვეთის ერთი ბოლო, მეორე ბოლოს შესაბამისი დანაყოფი გვიჩვენებს მონაკვეთის სიგრძეს. ნახაზზე მოცემულია მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა 4 სმ და 5 მმ.

ორ მონაკვეთს ეწოდება ტოლი, თუ მათი სიგრძეები ტოლია.



შევთანხმდეთ:

ტოლი მონაკვეთები ნახაზზე ერთნაირი ნიშნებით მოვნიშნოთ. ასევე, მომავალში AB ჩანაწერში შეგვიძლია AB მონაკვეთის სიგრძეც ვიგულისხმოთ.

მაგალითად, ნახაზზე $AB=DK$; $AK=DM$.

თუ K წერტილი MN მონაკვეთის შიგა წერტილია, მაშინ მონაკვეთი იყოფა ორ მონაკვეთად: MK და KN.



ამ შემთხვევაში შესრულდება ტოლობა: $MN = MK + KN$.

მონაკვეთის **შუაწერტილი** არის წერტილი, რომელიც მონაკვეთს ყოფს ორ ტოლ მონაკვეთად.

AB მონაკვეთის შუაწერტილია C, ანუ



$$AC = CB = \frac{AB}{2}.$$

ნებისმიერი მონაკვეთი შიგა წერტილით იყოფა ისეთ ორ მონაკვეთად, რომელთა სიგრძეების ჯამი მოცემული მონაკვეთის სიგრძის ტოლია.

შეამოწმეთ ამ აქსიომის ჭეშმარიტება გაზომვებით.

პარაგრაფის დასაწყისში დასმულ ამოცანაში, თუ ლიზას სახლს დავარქმევთ L-ს, კატოს სახლს – K-ს, ხოლო სკოლას – S-ს, მანძილს გამოვითვლით $LK = LS + SK$ ტოლობის გამოყენებით.

ამოცანა 1.

წრფეზე ავიღოთ $AB = 5$ სმ სიგრძის მონაკვეთი. ამავე წრფეზე ავიღოთ $AC = 3$ სმ სიგრძის მონაკვეთი. იპოვეთ BC მონაკვეთის სიგრძე.

ამოხსნა:

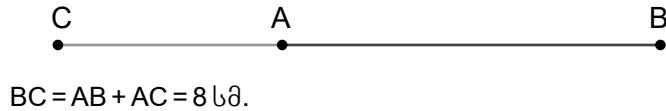
შესაძლებელია ორი შემთხვევა:



1. C წერტილი მდებარეობს A და B წერტილებს შორის.

$$BC = AB - AC = 2 \text{ სმ.}$$

2. A წერტილი მდებარეობს B და C წერტილებს შორის.



გავეცნოთ კიდევ ერთ აქსიომას:

ყოველ სხივზე მისი სათავიდან შესაძლებელია მოცემული სიგრძის ერთადერთი მონაკვეთის გადადება.

ამოცანა 2.

C წერტილი 20 სმ სიგრძის AB მონაკვეთის შიგა წერტილია. ვიპოვოთ AC და CB მონაკვეთების სიგრძეები, თუ BC მონაკვეთის სიგრძე 4 სმ-ით მეტია AC მონაკვეთის სიგრძეზე.

ამოხსნა:

AC მონაკვეთის სიგრძე აღვნიშნოთ x სმ-ით. პირობის მიხედვით, $BC = x + 4$ სმ. რადგან C წერტილი AB მონაკვეთის შიგა წერტილია: $AB = AC + CB$. ე.ი.
 $20 = x + (x + 4)$
 $x = 8,$

აქედან $BC = 8 + 4 = 12$ სმ

პასუხი: AC = 8 სმ, BC = 12 სმ.

ამოცანა 3.



კედლის სიმაღლე, რომელიც ორ ფერშია შეღებილი, 10 მეტრია. ქვემოდან მუქი ლურჯია, ზევით – ცისფერი, შუაში გამყოფი ზოლია. მიწის ზედაპირიდან რა სიმაღლეზეა გამყოფი ზოლი, თუ ლურჯის სიმაღლის შეფარდება ცისფერთან არის 2:3.

ამოხსნა:

რადგან შეფარდება არის 2 : 3, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ: $AB = 2x$ მ, $CB = 3x$ მ.

ვიცით, რომ $AB + CB = AC$.

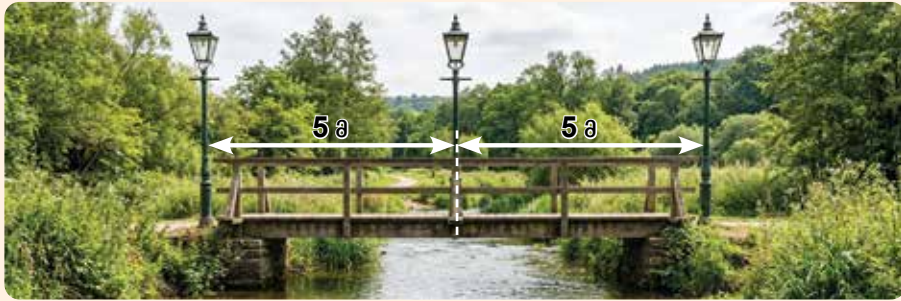
$2x + 3x = 10$; $x = 2$ მ.

აქედან: $AB = 4$ მ და $CB = 6$ მ.

პასუხი: გამყოფი ზოლი მიწის ზედაპირიდან 4 მეტრზეა.



1. თუ A, B, C წერტილები ერთ წრფეზეა და გვაქვს ტოლობა $AC+BC=AB$, მაშინ ჩამოთვლილი A, B, C წერტილებიდან რომელი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის?
2. პატარა მდინარის ხიდის თავში, ბოლოსა და ზუსტად შუაში დგას განათების ბოძები. შუა ბოძი ორივე კიდურა ბოძიდან დაშორებულია 5 მეტრით. რა სიგრძისაა ხიდი?



სავარჯიშოები

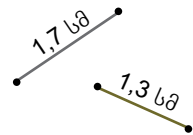
1. წრფეზე მონიშნეთ სამი განსხვავებული A, B, C წერტილი. შედეგად, სულ რამდენი მონაკვეთი მიიღება? (გაითვალისწინეთ, AB და BA ერთი და იგივე მონაკვეთია).
2. M წერტილი AB მონაკვეთის შიგა წერტილია (შეადგინეთ შესაბამისი ნახაზი):
 - ა) $AM = 7$ სმ, $MB = 12$ სმ. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე.
 - ბ) $AB = 9$ სმ, $AM = 3$ სმ. იპოვეთ MB მონაკვეთის სიგრძე.
 - გ) $AB = 11$ სმ, $AM = x$ სმ. გამოსახეთ MB -ს სიგრძე x -ის საშუალებით.
3. M წერტილი AB მონაკვეთის შიგა წერტილია. იპოვეთ:
 - ა) MB მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB = 7,3$ სმ, $AM = 3,4$ სმ;
 - ბ) AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AM = 2,7$ სმ, $MB = 3,5$ სმ.
4. $AB=3,4$ დმ სიგრძის მონაკვეთზე მონიშნეს მისი შიგა X წერტილი. რამდენი სანტიმეტრის ტოლი იქნება AX და BX მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი?
5. C წერტილი MN მონაკვეთის შიგა წერტილია. იპოვეთ MC და CN მონაკვეთების შუა წერტილებს შორის მანძილი, თუ $MN = 14$ სმ.
6. ნახაზის მიხედვით დაასახელეთ მონაკვეთები, რომელთათვისაც:

- ა) K შიგა წერტილია;
 - ბ) K მონაკვეთის ბოლოა.
7. აიღეთ ნებისმიერი AB მონაკვეთი. მიიჩნიეთ იგი სიგრძის ერთეულად და დახაზეთ კიდევ ორი მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეა:
 - ა) 3 ერთეული;
 - ბ) 4,5 ერთეული.

8. დახაზეთ AB და CD მონაკვეთები, რომელთაც საერთო წერტილი არ გააჩნიათ, თუ:
- AB და CD წრფეები არ იკვეთება;
 - AB და CD წრფეები იკვეთება.

9. მოცემულია 1,3 სმ და 1,7 სმ სიგრძის ორი მონაკვეთი. უდანაყოფო სახაზავის მეშვეობით დახაზეთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა:

- 3 სმ;
- 0,4 სმ;
- 0,9 სმ.



10. C წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია, ხოლო D წერტილი – AC მონაკვეთის შუაწერტილი. უპასუხეთ:

- რამდენჯერ მეტია AB მონაკვეთი CD მონაკვეთზე?
- რამდენჯერ ნაკლებია AD მონაკვეთი DB მონაკვეთზე?
- BD მონაკვეთის რა ნაწილია BC ?
- AB მონაკვეთის რა ნაწილია BD ?
- იპოვეთ $AC : BD$.

11. $AB=100$ სმ სიგრძის მონაკვეთი გაყოფილია სამ მონაკვეთად, რომელთა სიგრძეების შეფარდებაა 2:5:3 (ამავე თანმიმდევრობით). იპოვეთ კიდურა მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის მანძილი.

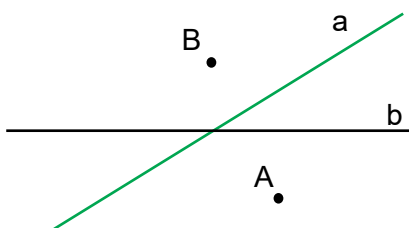


გამეორება

12. იპოვეთ სამი რიცხვი, რომელთა ჯამია 222, თუ მეორე რიცხვი 2-ჯერ მეტი, მესამე კი 3-ჯერ მეტია პირველზე.
13. შეადარე $3a-5$ და a^2-1 გამოსახულებების მნიშვნელობები, თუ:
- $a=5$;
 - $a=-3$.



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის



1. გადაიხაზეთ ნახაზი და გააფერადეთ $(a;A)$ და $(b;B)$ ნახევარსიბრტყეების
- გაერთიანება;
 - თანაკვეთა.

2. გაიხსენეთ, რა არის სხივი, დამატებითი სხივები.



რას შეძლებთ:

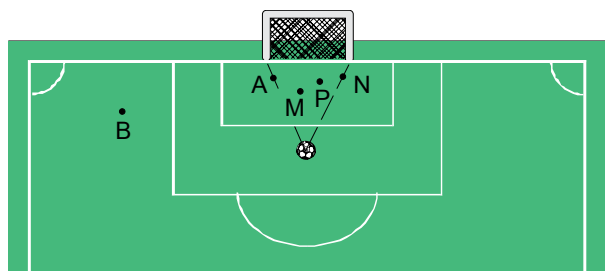
- მონაკვეთის აგებას, მისი სიგრძის გაზომვას, ტოლი მონაკვეთების მონიშვნას, ყოველივე ამის გამოყენებას ამოცანების ამოხსნისას.

4. კუთხე



მიზანი:

- განვმარტოთ კუთხე; ტოლი, გაშლილი, მახვილი, მართი და ბლაგვი კუთხეები;
- გავეცნოთ კუთხის საზომ ერთეულებს.



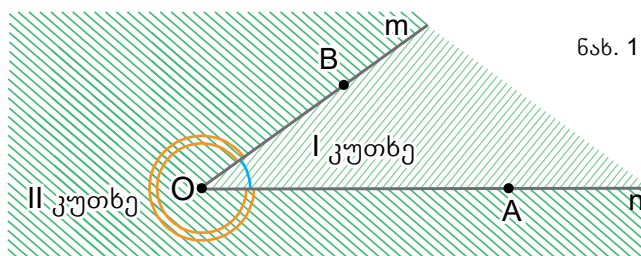
სურათის მიხედვით დაადგინეთ, რომელ წერტილებზე შეიძლება გაიაროს ბურთმა, რომელიც კარში გავა.

განვიხილოთ საერთო სათავეს მქონე ორი სხივი, OA და OB (იგივე m და n) (ნახ. 1).



იცოდით, რომ

მზის პანელების ეფექტურობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა კუთხით ეცემა მათზე მზის სხივები.



ეს ორი სხივი სიბრტყეს ყოფს ორ ნაწილად. თითოეულ ასეთ ნაწილს, ამ სხივებთან ერთად, ეწოდება **კუთხე**.

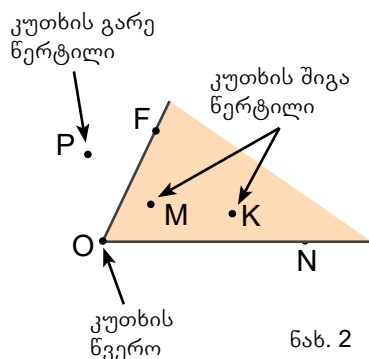
სხივებს, რომლებიც ქმნიან კუთხეს, **კუთხის გვერდები**, ხოლო მათ საერთო სათავეს, **კუთხის წვერო** ეწოდება. მაგრამ ნახ. 1-ზე რომელი ნაწილი ჩავთვალოთ OA და OB გვერდების მქონე კუთხედ?

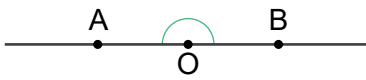
შევთანხმდეთ, რომ ძირითადად განვიხილავთ იმ **კუთხეს**, რომელიც მისი ერთ-ერთი გვერდის შემცველი **წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეშია მოთავსებული**.

თუ საუბარია II კუთხეზე, ამის შესახებ აუცილებლად იქნება მითითებული.

ე.ი. ნახ. 1-ზე OA და OB სხივებით შექმნილია I კუთხე, რომელიც ჩაინერგება, როგორც $\angle mn$; $\angle AOB$; $\angle BOA$ ან უბრალოდ $\angle O$.

როგორც აღვნიშნეთ, კუთხე საერთო სათავეს მქონე სხივებით შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილია. სიბრტყის ამავე ნაწილში მდებარე ნებისმიერ წერტილს **კუთხის შიგა წერტილი**, ხოლო სიბრტყის კუთხის გარეთ დარჩენილ ნაწილში მდებარე ნებისმიერ წერტილს – **კუთხის გარე წერტილი** ეწოდება (ნახ. 2).

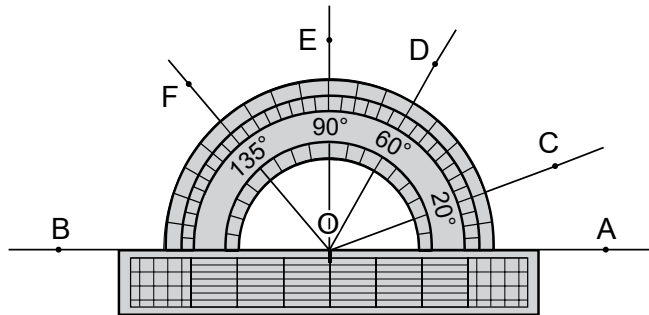




საათის ისრებს შორის გაშლილი კუთხეა

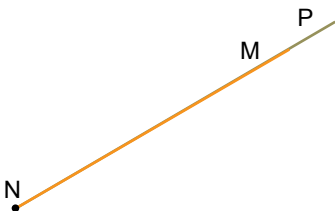
კუთხეს, რომლის გვერდები ერთმანეთის დამატებითი სხივებია, ეწოდება გაშლილი კუთხე. ნახაზზე $\angle AOB$ გაშლილი კუთხეა.

კუთხის გასაზომად გამოიყენება სპეციალური ხელსაწყო — ტრანსპორტირი. კუთხე იზომება გრადუსებში. 1 გრადუსი არის გაშლილი კუთხის $1/180$ ნაწილი და აღინიშნება ასე: 1° , ამიტომ გაშლილი კუთხის სრული გრადუსული ზომაა: 180° .



კუთხის გასაზომად გამოიყენება უფრო მცირე ერთეულიც — მინუტი. 1 მინუტი არის გრადუსის $1/60$ ნაწილი და აღინიშნება ასე: $1'$. მაგალითად: 30° — ოცდაათი გრადუსი; $20^\circ 15'$ — ოცი გრადუსი და თხუთმეტი მინუტი.

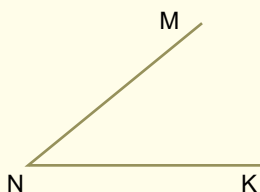
კუთხის ზომის ჩანერა ხდება ასე: $\angle AOC = 20^\circ$; $\angle AOD = 60^\circ$; $\angle AOE = 90^\circ$; $\angle AOF = 135^\circ$; $\angle AOB = 180^\circ$.



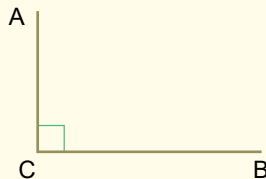
თუ კუთხის გვერდები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ კუთხის ზომა არის: $\angle MNP = 0^\circ$. ეს ნიშნავს, რომ სხივები NM და NP ერთი და იგივე სხივია.

ჩანაწერი $\angle AOB$ შეიძლება გამოვიყენოთ ორი მნიშვნელობით: კუთხის, როგორც გეომეტრიული ფიგურის აღსანიშნავად, ასევე ამ კუთხის გრადუსული ზომის აღსანიშნავად.

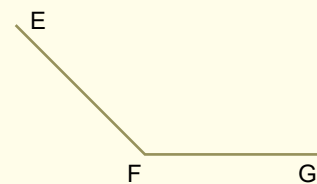
180° -ზე ნაკლები, დადებითი გრადუსული ზომის კუთხეები იყოფა შემდეგ კატეგორიებად:



მახვილი კუთხე — კუთხე, რომლის გრადუსული ზომა 0° -ზე მეტია და 90° -ზე ნაკლები;



მართი კუთხე — კუთხე, რომლის გრადუსული ზომა ზუსტად 90° -ია;



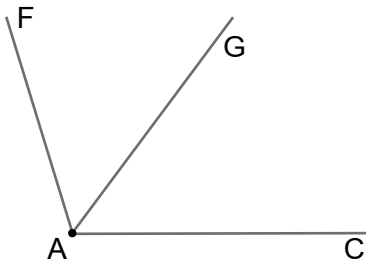
ბლაგვი კუთხე — კუთხე, რომლის გრადუსული ზომა 90° -ზე მეტია და 180° -ზე ნაკლები.

ვიტყვი, რომ სხივი გადის კუთხის გვერდებს შორის, თუ:

- მისი სათავე ემთხვევა კუთხის წვეროს;
- სხივი გადის კუთხის რომელიმე შიგა წერტილზე.

ასეთ შემთხვევაში სხივი კუთხეს ორ კუთხედ ყოფს. ორივე მათგანი წარმოადგენს მოცემული კუთხის ნაწილს. მაგალითად, თუ AG სხივი გადის $\angle FAC$ კუთხის გვერდებს შორის, მაშინ მიიღება ორი ახალი კუთხე: $\angle FAG$; $\angle GAC$.

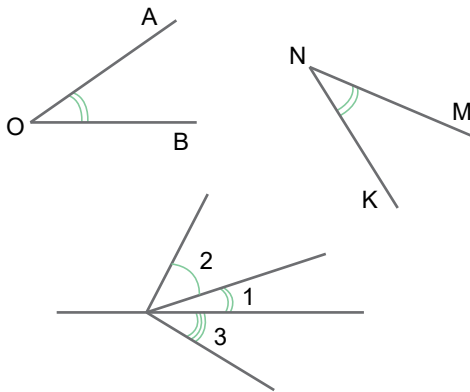
ამ შემთხვევაში მოქმედებს მნიშვნელოვანი თვისება (აქსიომა):



კუთხის გვერდებს შორის გამავალი სხივით წარმოქმნილი კუთხეების გრადუსულ ზომათა ჯამი ტოლია მოცემული კუთხის გრადუსული ზომისა.

მაგალითად, ნახაზზე AG სხივი გადის $\angle FAC$ კუთხის გვერდებს შორის, ამიტომ: $\angle FAC = \angle FAG + \angle GAC$; ეს თვისება ადვილად შეიძლება გადავამოწმოთ ტრანსპორტირის გამოყენებით.

ორ კუთხეს ეწოდება ტოლი, თუ მათი გრადუსული ზომები ტოლია.



შევთანხმდეთ, ტოლი კუთხეები ნახაზზე ერთნაირად მოვნიშნოთ, მაგალითად, ნახაზზე $\angle AOB = \angle MNK$.

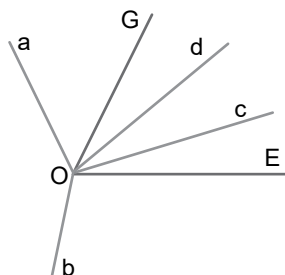
ზოგჯერ სიმარტივისთვის კუთხეებს აღნიშნავენ ნომრებითაც: $\angle 1$; $\angle 2$; $\angle 3$, ასეთი აღნიშვნა განსაკუთრებით მოსახერხებელია მაშინ, როცა ერთ ნახაზზე რამდენიმე კუთხეა მოცემული.



1. რას ეწოდება კუთხე? რას წარმოადგენს კუთხის გვერდები და კუთხის წვერო?
2. რას ნიშნავს, რომ წერტილი არის კუთხის შიგა წერტილი?
3. რას ეწოდება გაშლილი კუთხე და რა არის მისი გრადუსული ზომა?
4. როგორ კუთხეებს ეწოდება ტოლი კუთხეები?
5. როგორ კუთხეებს ეწოდება მახვილი, მართი და ბლაგვი კუთხეები?
6. როდის ვამბობთ, რომ სხივი გადის კუთხის გვერდებს შორის?



7. არის თუ არა მოცემულ საათების ისრებს შორის კუთხეები ტოლი? რამდენი გრადუსია თითოეული მათგანი?



1. ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ, რომელი სხივები ყოფენ $\angle GOE$ -ს ორ კუთხედ?

2. დახაზეთ $\angle ABC$. მონიშნეთ:

ა) ორი შიგა წერტილი M და N;

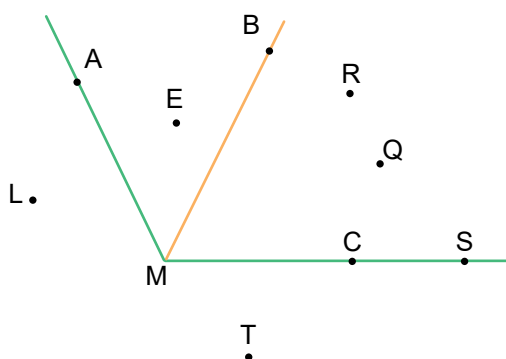
ბ) ორი გარე წერტილი P და Q.

3. ნახაზის მიხედვით, უპასუხეთ კითხვებს:

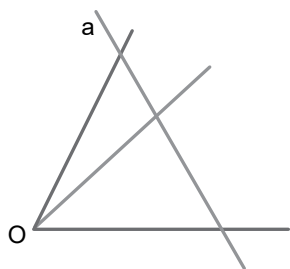
ა) მოცემული წერტილებიდან რომელი შეიძლება ჩაითვალოს $\angle AMC$ კუთხის შიგა წერტილებად?

ბ) რომელი კუთხის შიგა წერტილს წარმოადგენს R წერტილი?

გ) არსებული წერტილებიდან რომელი წერტილები წარმოადგენენ $\angle AMB$ კუთხის გარე არის წერტილებს?



4. A და B წერტილები $\angle COD$ კუთხის შიგა წერტილებია. როგორ ფიქრობთ, AB მონაკვეთის წერტილები არის თუ არა $\angle COD$ კუთხის შიგა წერტილები?



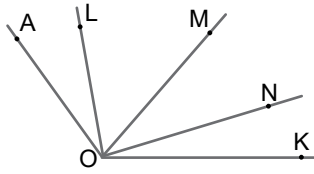
5. ნახაზზე სხივები OM, ON და OK კვეთენ a წრფეს შესაბამისად M, N და K წერტილებში. დასვით გამოტოვებული ასოები (M, N და K), თუ ცნობილია, რომ:

$$MN = 2,8 \text{ სმ}$$

$$MK = 5,1 \text{ სმ}$$

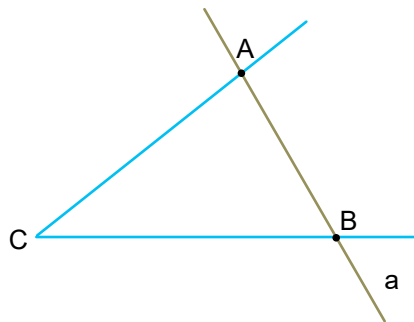
$$NK = 7,9 \text{ სმ}$$

და დაადგინეთ, რომელი სხივი გადის დანარჩენი ორი სხივით შექმნილი კუთხის გვერდებს შორის.



6. ნახაზზე ხუთ სხივს ერთი საერთო სათავე O აქვს. დაასახელეთ ყველა კუთხე:
- რომლის შიგა წერტილია M;
 - რომლის შიგა წერტილია K.

7. წრფე a კვეთს ACB კუთხის გვერდებს, შესაბამისად, A და B წერტილებში. დასვით a წრფეზე წერტილები M, N და K ისე, რომ M მდებარეობდეს A და B წერტილებს შორის; N მდებარეობდეს M და A წერტილებს შორის; B მდებარეობდეს M და K წერტილებს შორის. დაადგინეთ, CN, CM და CK სხივებიდან რომელი გადის $\angle ACB$ კუთხის გვერდებს შორის.



8. დახაზეთ განსხვავებული OA, OB, OC და OD სხივები. დაასახელეთ ყველა შესაძლო კუთხე, რომელიც მიიღება ამ სხივებით.
9. ტრანსპორტირის გამოყენებით დახაზეთ სამი სხვადასხვა კუთხე. გაზომეთ მათი გრადუსული ზომები და ჩაწერეთ შემდეგი ფორმით:
 $\angle ABC = \dots^\circ$; $\angle DEF = \dots^\circ$; $\angle KLM = \dots^\circ$
 შემდეგ დაადგინეთ, რომელია ყველაზე დიდი კუთხე.
10. OK სხივი გადის $\angle AOB$ კუთხის გვერდებს შორის. მოცემულია: $\angle AOK = 38^\circ$; $\angle BOK = 57^\circ$. დახაზეთ შესაბამისი ნახაზი და იპოვეთ $\angle AOB$ კუთხის გრადუსული ზომა.
11. სხივი OM გადის $\angle AOB$ კუთხის გვერდებს შორის. იპოვეთ $\angle AOM$ და $\angle MOB$, თუ:
- $\angle AOB = 120^\circ$ და $\angle MOB = 45^\circ$;
 - $\angle AOB = 95^\circ$ და $\angle AOM = \angle BOM + 17^\circ$;
 - $\angle AOB = 110^\circ$ და $\angle AOM : \angle MOB = 3:2$.
12. სხივი OA გადის $\angle MOK$ კუთხის გვერდებს შორის. იპოვეთ $\angle MOA$ და $\angle AOK$, თუ:
- $\angle MOK = 90^\circ$ და $\angle MOA$ არის $\angle AOK$ -ზე 15° -ით მეტი;
 - $\angle MOK = 120^\circ$ და $\angle MOA$ არის სამჯერ მეტი $\angle AOK$ -ზე;
 - $\angle MOK = 80^\circ$ და $\angle MOA : \angle AOK = 7:3$.
13. რამდენ გრადუსიან კუთხეს ადგენენ ერთმანეთთან საათის და წუთების მაჩვენებელი ისრები 18:00-ზე? 00:00-ზე?



გამეორება

14. A იყოს ყველა მეშვიდეკლასელი მოსწავლის სიმრავლე, B – წითური ბავშვების სიმრავლე, C – ხელოვნების მოყვარულ მოსწავლეთა სიმრავლე.

ჩამოაყალიბეთ სიტყვიერად შემდეგი ჩანაწერი:

- ა) $A \subset B$; ბ) $A \subset C$; გ) $A \cap B = \emptyset$; დ) $A \cap B \cap C$.

15. რომელი წინადადებაა ჭეშმარიტი:

- ა) თუ $K \in MN$ მონაკვეთს, მაშინ $K \in MN$ წრფეს;
ბ) თუ $K \in MN$ წრფეს, მაშინ აუცილებლად $K \in MN$ მონაკვეთს;
გ) თუ $K \in MN$ წრფეს, მაშინ აუცილებლად $K \in MN$ სხივს?

16. თუ ცნობილია, რომ $AB=15$ სმ; $BC=9$ სმ; $AC=7$ სმ, მაშინ:

- ა) A , B და C წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს;
ბ) A მდებარეობს B და C წერტილებს შორის;
გ) B მდებარეობს A და C წერტილებს შორის.



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. დახაზეთ $\angle AOB = 50^\circ$. გაატარეთ კუთხის შიგნით OC სხივი ისე, რომ კუთხე $\angle AOC$ უდრიდეს 25° -ს. რისი ტოლია $\angle BOC$?

2. როგორ კუთხეებს ადგენს წამების ისარი საათის და წუთების ისრებთან?



რას შეძლებთ:

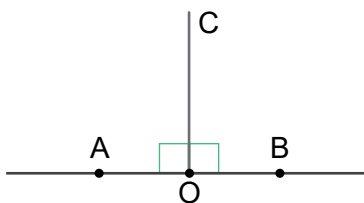
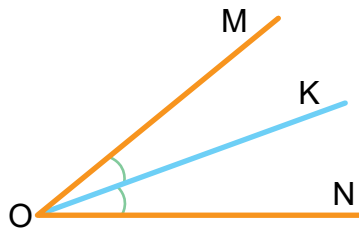
- ტრანსპორტირის საშუალებით კუთხის გაზომვას;
- კუთხეების ამოცნობას მათი გრადუსული ზომის მიხედვით (მახვილი, მართი, ბლაგვი, გაშლილი).
- სხვადასხვა ზომის კუთხეების შედარებას.

5. კუთხის ბისექტრისა



მიზანი:

- გავეცნოთ კუთხის ბისექტრისის ცნებას;
- ვისწავლოთ ტოლი კუთხეების მონიშვნა და კუთხეების ტოლობის ჩანერა.



მართი კუთხე აღინიშნება ისე, როგორც ნახაზზეა მონიშნული.

დახაზეთ ნებისმიერი კუთხე. შესაძლებელია თუ არა ტრანსპორტირის დახმარებით ამ კუთხის გაყოფა ორ ტოლ ნაწილად? რისი გატარება მოგიწევთ ამ დავალების შესასრულებლად? რას ნიშნავს სხივი გადის კუთხის გვერდებს შორის?

კუთხის გვერდებს შორის გამავალ სხივს, რომელიც კუთხეს ორ ტოლ ნაწილად ყოფს, ეწოდება **კუთხის ბისექტრისა**.

ვთქვათ, მოცემულია კუთხე $\angle MON$. თუ სხივი OK გადის ამ კუთხის გვერდებს შორის და კუთხეს ყოფს ორ ტოლ ნაწილად, მაშინ OK სხივი არის $\angle MON$ კუთხის ბისექტრისა. ამ შემთხვევაში მიიღება ორი ტოლი კუთხე: $\angle MOK$ და $\angle KON$; მათემატიკურად ეს ჩაიწერება ასე: $\angle MOK = \angle KON$.

ბისექტრისა შეიძლება გავავლოთ $\angle AOB$ გაშლილ კუთხეშიც. რადგან გაშლილი კუთხის ზომა არის 180° , ამიტომ OC ბისექტრისა მას გაყოფს ორ ტოლ $\angle AOC = 90^\circ$ და $\angle COB = 90^\circ$ სიდიდის კუთხეებად.

ამ შემთხვევაში თითოეული მიღებული კუთხე არის მართი კუთხე.

ამოცანა.

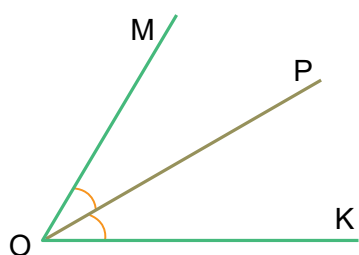
იპოვეთ $\angle MOK$ კუთხის გრადუსული ზომა, თუ ამ კუთხის OP ბისექტრისა OK სხივთან ადგენს 40° -იან კუთხეს.

ამოხსნა:

რადგან OP სხივი არის $\angle MOK$ კუთხის ბისექტრისა, იგი ამ კუთხეს ყოფს ორ ტოლ კუთხედ. ამიტომ: $\angle MOP = \angle POK$, პირობის მიხედვით: $\angle POK = 40^\circ = \angle MOP$;

რადგან მთლიანი კუთხე შედგება ამ ორი კუთხისგან, მივიღებთ: $\angle MOK = \angle MOP + \angle POK$; $\angle MOK = 80^\circ$.

პასუხი: $\angle MOK$ კუთხის გრადუსული ზომაა 80° .

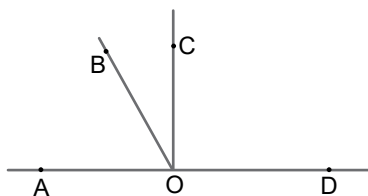




1. რას ეწოდება კუთხის ბისექტრისა და როგორ ჩავწეროთ, რომ AK სხივი BAC კუთხის ბისექტრისაა?
2. რა ზომის კუთხეები მიიღება, თუ გავავლებთ გაშლილი კუთხის ბისექტრისას?
3. მიუთითეთ მართი კუთხე თქვენი საკლასო ოთახის იატაკის სიბრტყეზე, კედლისა და მაგიდის ზედაპირზე.



სავარჯიშოები



1. ნახაზზე სხივებს OA , OB , OC და OD საერთო O სათავე აქვთ. მოცემულია: $\angle AOB = 60^\circ$; $\angle BOC = 30^\circ$; $\angle COD = 90^\circ$.

ა) რამდენი კუთხე მიიღება ნახაზზე?

ბ) დაასახელეთ, მათ შორის რომელია მახვილი, მართი და ბლაგვი კუთხეები.

2. დახაზეთ $\angle MON$ კუთხე. გაავლეთ სხივი OK ისე, რომ ის $\angle MON$ კუთხის ბისექტრისა იყოს.

ა) რა კავშირი იქნება $\angle MOK$ და $\angle KON$ კუთხეებს შორის?

ბ) თუ $\angle MON = 84^\circ$, იპოვეთ $\angle MOK$ და $\angle KON$.

3. სხივი OC არის $\angle AOB$ კუთხის ბისექტრისა. მოცემულია $\angle AOB = 120^\circ$. იპოვეთ:

ა) $\angle AOC$;

ბ) $\angle COB$;

გ) რამდენი გრადუსით განსხვავდება $\angle AOC$ და $\angle AOB$.

4. სხივი OM არის $\angle NOK$ კუთხის ბისექტრისა. მოცემულია: $\angle MOK = 38^\circ$. იპოვეთ:

ა) $\angle NOM$;

ბ) $\angle NOK$.

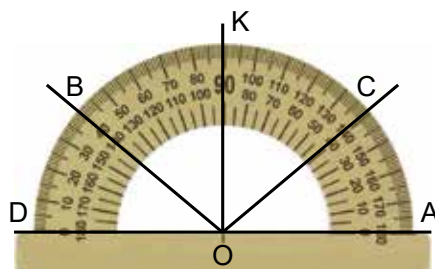
5. სხივი OC არის $\angle AOB$ კუთხის ბისექტრისა, ხოლო სხივი OD არის $\angle AOC$ კუთხის ბისექტრისა. მოცემულია: $\angle AOB = 96^\circ$. იპოვეთ:

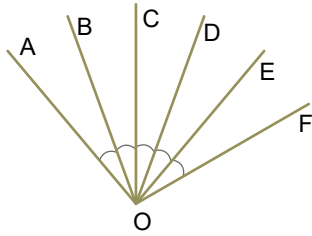
ა) $\angle AOC$;

ბ) $\angle AOD$;

გ) $\angle DOB$.

6. ნახაზზე წარმოდგენილი კუთხეებიდან რომელია 140° -ის ტოლი? 90° -ის ტოლი? 50° -ის ტოლი? კიდევ რა ზომის კუთხეებს ხედავთ ნახაზზე?



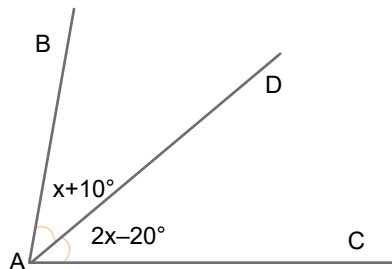


7. სურათის მიხედვით დაადგინეთ, რომელი კუთხეების ბისექტრისაა OC სხივი? ახსენით თქვენ მიერ დასახელებული კუთხეებისთვის, რატომ არის OC სხივი ბისექტრისა.

8. ორ ბლაგვ კუთხეს აქვს საერთო გვერდი და არ აქვს საერთო შიგა წერტილები. როგორი შეიძლება იყოს კუთხე მათ ბისექტრისებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

9. $\angle AOB$ არის გაშლილი კუთხე. სხივები OC და OD მდებარეობს AB წრფის ერთ ნახევარსიბრტყეში. მოცემულია: $\angle AOC = 65^\circ$ და $\angle DOB = 40^\circ$. იპოვეთ $\angle COD$ და დაადგინეთ, მახვილია ეს კუთხე, მართი თუ ბლაგვი.

10. დახაზეთ $\angle ABC = 84^\circ$, კუთხის შიდა არეში გაავლეთ BD სხივი. შემდეგ გაავლეთ $\angle ABD$ და $\angle DBC$ -ს ბისექტრისები BE და BF. დაადგინეთ $\angle EBF$ -ის გრადუსული ზომა. ახსენით თქვენ მიერ ამოცანის ამოხსნისთვის ჩატარებული სამუშაო ეტაპობრივად.



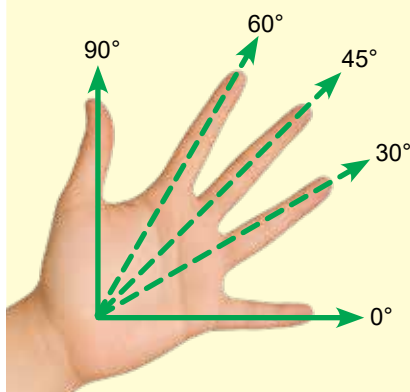
11. AD სხივი წარმოადგენს BAC კუთხის ბისექტრისას. ნახაზზე არსებული მონაცემების მიხედვით დაადგინეთ BAC კუთხის გრადუსული ზომა. რისი ტოლია BAD და DAC კუთხეების გრადუსული ზომები?



რას შეიძლება:

- კუთხის ბისექტრისის აგებას. მიღებული კუთხეების გრადუსული ზომების დადგენას.
- ბისექტრისის გეომეტრიულ ამოცანებში გამოყენებას.

გეომეტრია ცხოვრებაში



კუთხეები ხელზე

ხელის თითების მიმართულებები შეიძლება გამოვიყენოთ კუთხეების სწრაფი დემონსტრირებისთვის. გაშლილი ხელის შემთხვევაში:
 ნეკა თითის მიმართულება შეესაბამება დაახლოებით 0° -ს;
 არათითი – 30° ;
 შუა თითი – 45° ;
 საჩვენებელი თითი – 60° ;
 ცერა თითი – 90° .

6. მოსაზღვრე კუთხეები



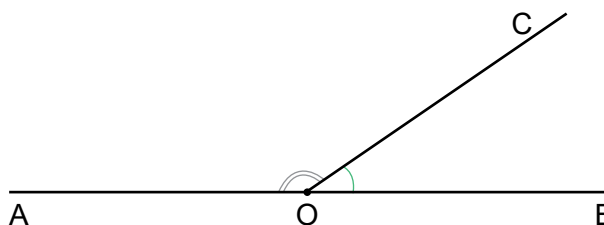
მიზანი:

- განვსაზღვროთ მოსაზღვრე კუთხეები;
- ვისწავლოთ, როგორ შეიძლება მოსაზღვრე კუთხეების დახაზვა და რისი ტოლია მათი ჯამი.



გავიხსენოთ, რას წარმოადგენს გაშლილი კუთხე და რას უდრის მისი გრადუსული ზომა.

სპიდომეტრი გვიჩვენებს, რომ მანქანა მოძრაობს 120 კმ/სთ სიჩქარით. რამდენ გრადუსიან კუთხეებს ადგენენ მეზობელი სხივები ერთმანეთთან?



ნახ. 1

გაშლილი AOB კუთხის O წვეროდან გავავლოთ OC სხივი. მივიღებთ ორ – AOC და COB კუთხეს (ნახ.1), რომელთაც OC გვერდი საერთო აქვთ, OA და OB გვერდები კი დამატებითი სხივებია.

ორ კუთხეს ეწოდება მოსაზღვრე, თუ მათ ერთი გვერდი საერთო აქვთ, დანარჩენი ორი გვერდი კი ერთმანეთის დამატებითი სხივებია.

გეომეტრია ცხოვრებაში

მოსაზღვრე კუთხეების მაგალითები



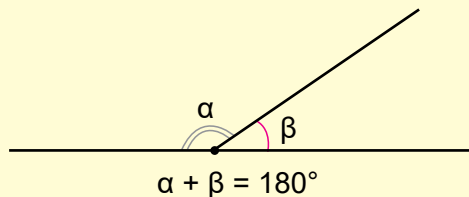
განვიხილოთ $\angle AOC$ და $\angle COB$ მოსაზღვრე კუთხეები (ნახ. 1). განმარტების თანახმად, OA და OB დამატებითი სხივებია. მაშასადამე, $\angle AOB$ კუთხე გაშლილი კუთხეა, OC სხივი კი გადის $\angle AOB$ კუთხის გვერდებს შორის.
 ე.ი. $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$, მაგრამ $\angle AOB = 180^\circ$,
 მაშასადამე, $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$.



იცოდით, რომ

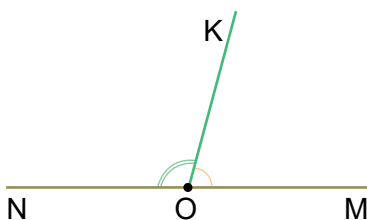
გახსნილი კარი ყოველთვის ორ მოსაზღვრე კუთხეს ქმნის. როცა ერთი ზომა იზრდება, მეორის ზომა იმდენით მცირდება, რომ მათი ჯამი უცვლელი რჩება.

მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180° -ია.



ამოცანა.

იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ ერთი მეორეზე 30° გრადუსით მეტია.



ამოხსნა:

მოცემულია $\angle MOK$ და $\angle KON$ მოსაზღვრე კუთხეები.
 $\angle KON = \angle MOK + 30^\circ$

უ.ვ $\angle MOK$ და $\angle KON$

მოსაზღვრე კუთხეების თვისების თანახმად,
 $\angle KON + \angle MOK = 180^\circ$.

ამოცანის პირობის თანახმად, $\angle KON = \angle MOK + 30^\circ$, ამიტომ
 $\angle MOK + 30^\circ + \angle MOK = 180^\circ$; $2 \cdot \angle MOK = 150^\circ$.

ე.ი. $\angle MOK = 75^\circ$ და $\angle KON = 105^\circ$.



1. არის თუ არა ორი კუთხე აუცილებლად მოსაზღვრე, თუ მათი ჯამი 180° -ია?
2. შეიძლება თუ არა, მოსაზღვრე კუთხეებიდან ორივე იყოს ბლაგვი? მახვილი?
3. α და β მოსაზღვრე კუთხეებია. როგორია β , თუ α მახვილია? მართია? ბლაგვია?
4. როგორია ტოლი კუთხეების მოსაზღვრე კუთხეები?
5. თუ მოსაზღვრე კუთხეები ტოლია, შეიძლება თუ არა მათგან რომელიმე იყოს ბლაგვი?



სავარჯიშოები

1. უჯრებიან ფურცელზე დახაზეთ:

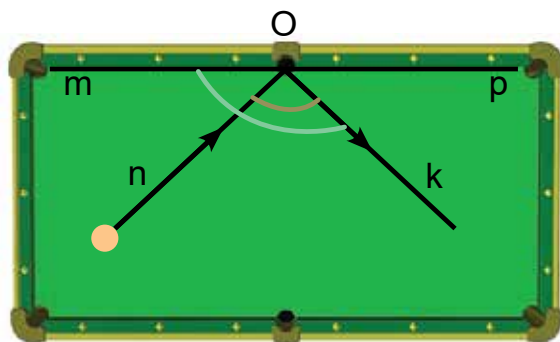
ა) მახვილი კუთხე; ბ) მართი კუთხე; გ) ბლაგვი კუთხე.

თითოეულ შემთხვევაში მიუთითეთ თქვენ მიერ დახაზული კუთხის მოსაზღვრე კუთხე და ტრანსპორტირის დახმარებით გაზომეთ სურათზე არსებული კუთხეების გრადუსული ზომები.

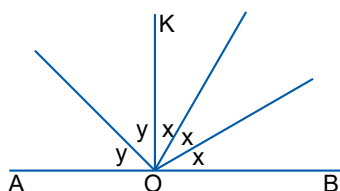
2. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეების გრადუსული ზომები, თუ ერთი მეორეზე 50° -ით მეტია.

3. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეების გრადუსული ზომები, თუ ერთი მეორეზე 3-ჯერ მეტია.

4. ცნობილია, რომ ბილიარდის ბურთი რა კუთხითაც ხვდება მის კედელს O წერტილში, იმავე კუთხით აირეკლება. ცნობილია, რომ $\angle mk = 137^\circ$. რას უდრის $\angle nk$?

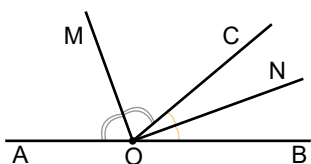


5. რამდენი გრადუსია ველოსიპედის ბორბლის ორ მეზობელ ჩხირს შორის, თუ მას 18 ჩხირი აქვს?



6. OK სხივი AOB გაშლილი კუთხის ბისექტრისაა.

იპოვეთ $\frac{2x-y}{x-y}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.



7. AOB გაშლილი კუთხეა. ON სხივი COB კუთხის ბისექტრისაა, ხოლო OM სხივი AOC კუთხის ბისექტრისა. დაადგინეთ MON კუთხის გრადუსული ზომა.



კვლევითი დავალება

დახაზეთ რამდენიმე სხვადასხვა კუთხე. თითოეულ შემთხვევაში ერთ-ერთი გვერდი გააგრძელეთ ისე, რომ მიიღოთ მოსაზღვრე კუთხეები.
გაზომეთ ორივე კუთხე და შეადარეთ მათი ჯამები.
რა საერთო თვისება აღმოაჩინეთ?



გამეორება

8. წრფეზე აღებულია სამი წერტილი. შეიძლება თუ არა, რომ მიღებული სამი მონაკვეთიდან:
 - ა) ერთ-ერთი იყოს დანარჩენი ორის ჯამზე მეტი?
 - ბ) ერთ-ერთი იყოს დანარჩენი ორის ჯამზე ნაკლები?
9. ტყეში სეირნობისას ლექსო ყოველ 40 მეტრში პოულობდა სოკოს. რამდენი მეტრი გაიარა მან პირველიდან ბოლო სოკომდე, თუ სულ 20 სოკო იპოვა?
10. გია ტრამპლინიდან ხტება წყალში. თავდაპირველად ტრამპლინმა ის 1 მ-ით ზევით ააგდო, შემდეგ დაბლა დაეშვა 6 მეტრით და ყვინთვით ამოვიდა მაღლა 2 მეტრით. რა სიმაღლეზეა ტრამპლინი წყლის ზედაპირიდან?



რას შეძლებთ:

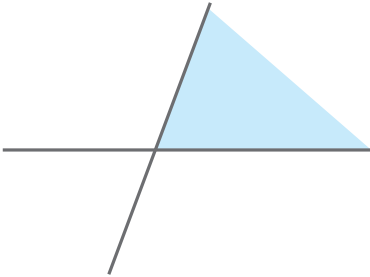
- ამოიცნობთ მოსაზღვრე კუთხეებს, მათი გრადუსული ზომების გამოთვლას.
- გამოიყენებთ მოსაზღვრე კუთხეების თვისებას ამოცანების ამოხსნისას.

7. ვერტიკალური კუთხეები



მიზანი:

- გავეცნოთ ვერტიკალური კუთხეების ცნებას, მათ თვისებას.



თამუნას დაავალეს გაეფერადებინა ცისფრად გაფერადებული კუთხის მოსაზღვრე კუთხე წითლად. როგორ ფიქრობთ, რომელი კუთხე უნდა გააფერადოს მან?

რამდენი მოსაზღვრე კუთხე შეიძლება ჰქონდეს მოცემულ კუთხეს?

განვიხილოთ $\angle AOB$ (ნახ. 1). თუ გავავლებთ ამ კუთხის გვერდების OC და OK დამატებით სხივებს, მივიღებთ AOB კუთხის მოსაზღვრე ორ კუთხეს – $\angle AOK$ -ს და $\angle BOC$ -ს.

ე.ი. $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ და $\angle AOB + \angle AOK = 180^\circ$.

მივიღეთ: $\angle AOK = 180^\circ - \angle AOB$

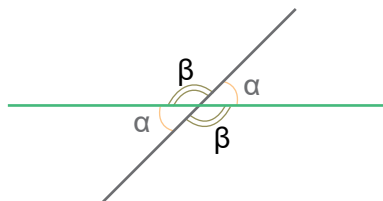
$\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\angle AOK = \angle BOC$.

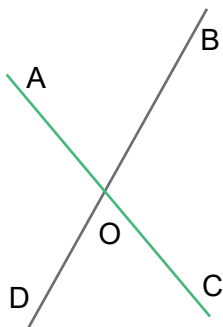
მაშასადამე, მოცემული კუთხის ორივე მოსაზღვრე კუთხე ერთმანეთის ტოლია. AOK და BOC კუთხეებს ვერტიკალურ კუთხეებს უწოდებენ. მათ საერთო სათავე აქვთ. $\angle AOK$ -ს გვერდები BOC კუთხის გვერდების დამატებითი სხივებია. ე.ი. ისინი მიიღება ორი წრფის, ჩვენს შემთხვევაში, KB და AC წრფეების გადაკვეთის შედეგად.

ორ კუთხეს ვერტიკალური ეწოდება, თუ ერთი კუთხის გვერდები მეორე კუთხის გვერდების დამატებითი სხივებია.

ჩვენ უკვე ვაჩვენეთ ვერტიკალური კუთხეების თვისება.



ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.



ამოცანა.

ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ორის ჯამია 160° , იპოვეთ ოთხივე კუთხის (არა გაშლილი) გრადუსული ზომა.

ამოხსნა:

ცხადია, 160° არის ვერტიკალური კუთხეების ჯამი, ე.ი. $\angle BOC = \angle AOD = 100^\circ$, ხოლო $\angle AOB = \angle DOC = 80^\circ$, როგორც $\angle BOC$ -ს მოსაზღვრე კუთხეები.

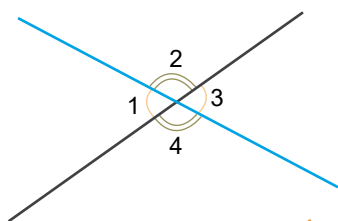


- როგორ მიიღება ვერტიკალური კუთხეები?
- ორი წრფის გადაკვეთისას მიიღება α და β გრადუსული ზომის კუთხეები. თუ α ბლაგვი კუთხეა, როგორი შეიძლება იყოს β კუთხე?

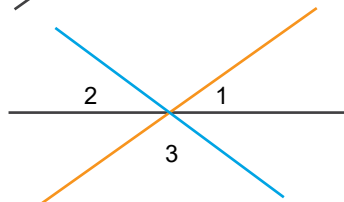


სავარჯიშოები

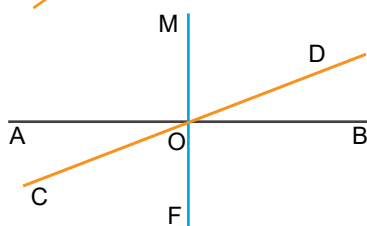
- ფურცელზე სახაზავის დახმარებით ააგეთ hk კუთხე. შემდეგ დახაზეთ ამ კუთხის mn ვერტიკალური კუთხე.
- იპოვეთ ABC კუთხის მოსაზღვრე კუთხის გრადუსული ზომა, თუ:
 - $\angle ABC = 22^\circ 12'$;
 - $\angle ABC = 90^\circ$;
 - $\angle ABC = 121^\circ 15'$.



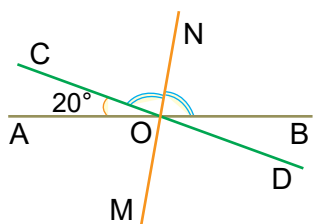
- ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ 1, 2, 3 რიცხვებით აღნიშნული კუთხეების გრადუსული ზომები, თუ ცნობილია, რომ $\angle 4 = 109^\circ$.



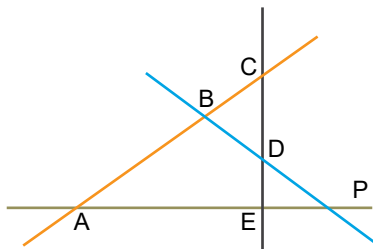
- ნახაზზე სამი წრფე არის გავლებული, რომლებიც ერთ წერტილში იკვეთება. დაადგინეთ, რამდენი გრადუსის ტოლია ჯამი: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.



- CD , AB და MF წრფეები იკვეთება O წერტილში. ცნობილია, რომ $\angle AOC = 20^\circ$ და $\angle MOB = 90^\circ$. იპოვეთ MOD კუთხის გრადუსული ზომა.

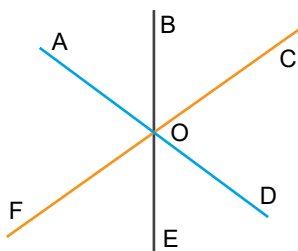


6. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ MOD კუთხის გრადუსული ზომა, თუ ცნობილია, რომ CD, MN და AB წრფეები იკვეთება O წერტილში.

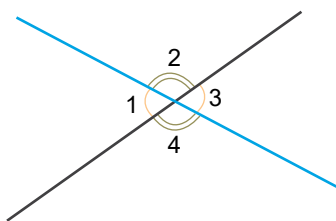


7. ნახაზზე მოცემულია სიბრტყეზე გავლებული ოთხი წრფის წყვილ-წყვილად გადაკვეთის შედეგად მიღებული A, B, C, D, E და P წერტილები. მოძებნეთ $\angle ABD$; $\angle ACE$; $\angle BDC$; $\angle DEA$; $\angle DCB$; $\angle ECA$; $\angle AED$; $\angle DEP$; $\angle EDB$; $\angle CDP$; $\angle DBC$ და განსაზღვრეთ მათგან:

- ა) რომლები გამოსახავენ ერთსა და იმავე კუთხეს?
ბ) რომელი კუთხეებია ვერტიკალური და რომელი – მოსაზღვრე?



8. ნახაზზე გავლებულია სამი წრფე, რომლებიც ერთ წერტილში იკვეთება. ცნობილია, რომ $\angle COD = 70^\circ$ და $\angle AOB = 60^\circ$. დაადგინეთ $\angle AOC$, $\angle AOE$, $\angle FOD$ კუთხეთა ზომები. ასევე იპოვეთ FC და BE წრფეებს შორის კუთხის გრადუსული ზომა.



9. დაადგინეთ, ნახაზზე მოცემული ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული 1; 2; 3; 4 რიცხვებით აღნიშნულ კუთხეთა გრადუსული ზომები, თუ ცნობილია, რომ
- ა) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 250^\circ$;
ბ) $\angle 2 - \angle 3 = 38^\circ$;
გ) $4 \cdot (\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$.

10. შესაძლებელია თუ არა, რომ ორი წრფის გადაკვეთისას მივიღოთ:

- ა) ოთხი მახვილი კუთხე?
ბ) სამი ბლაგვი და ერთი მახვილი კუთხე?
გ) ორი მართი და ორი მახვილი კუთხე?
დ) ოთხი მართი კუთხე?



რას შეძლებთ:

- ვერტიკალურ კუთხეების ამოცნობას და მათი თვისების გამოყენებას ამოცანების ამოხსნისას.

8. კუთხე ორ წრფეს შორის

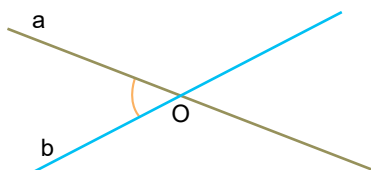


მიზანი:

- განვმარტოთ სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს შორის კუთხე;
- გავცნოთ მართობული წრფეების ცნებას.



მიუთითეთ კუთხე, რომელსაც სადღესასწაულო გირლიანდები ადგენენ ერთმანეთთან. როგორი კუთხეები მივიღეთ გირლიანდების შემცველი წრფეების გადაკვეთისას და რომელია მათ შორის ამ წრფეებს შორის კუთხე?



ნახ. 1

ვთქვათ, ორი a და b წრფე იკვეთება O წერტილში (ნახ. 1). გადაკვეთისას მიიღება ოთხი (180° -ზე ნაკლები ზომის) კუთხე, რომელთაგან ყოველი ორი ან მოსაზღვრე, ან ვერტიკალური კუთხეებია.

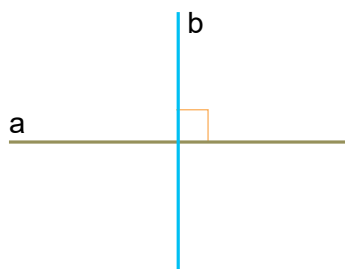
ე.ი. ამ ოთხი კუთხიდან გრადუსული ზომით განსხვავებული შეიძლება გვექონდეს მხოლოდ ორი კუთხე.

იმ კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომა არ აღემატება დანარჩენების გრადუსულ ზომებს, ეწოდება **კუთხე a და b წრფეებს შორის**.

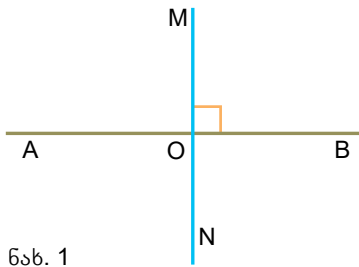
თუ ორი წრფე ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ მათ შორის კუთხე 0° -ია.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ თუ ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული (180° -ზე ნაკლები ზომის) კუთხეებიდან ერთი კუთხე მართია, მაშინ დანარჩენი სამიც მართი იქნება. ამ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ ამ ორ წრფეს შორის კუთხე 90° -ია, ან ეს ორი წრფე მართი კუთხით იკვეთება.

ორ წრფეს, რომლებიც მართი კუთხით იკვეთება, მართობული (პერპენდიკულარული) წრფეები ეწოდება.



შევთანხმდეთ, ის, რომ a წრფე b წრფის მართობულია, ასე ჩავწეროთ: $a \perp b$.
ნიშანი „ $\perp$ “ აღნიშნავს მართობულობას.



ნახ. 1

მოცემული წრფის მართობი (პერპენდიკულარი) ეწოდება მისი მართობული წრფის მონაკვეთს, რომლის ერთი ბოლო ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილია. ამ წერტილს მართობის ფუძე ეწოდება.

ნახაზ 1-ზე MO მონაკვეთი AB წრფის მართობია, O წერტილი კი მართობის ფუძეა.

ამოცანა.

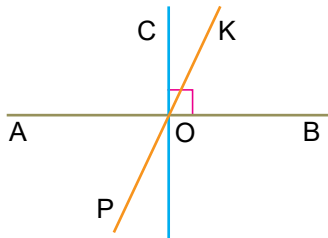
დავადგინოთ, სიბრტყეში მდებარე a წრფის თითოეულ წერტილზე, ამავე სიბრტყეში, ამ წრფის რამდენი მართობული წრფის აღმართვაა შესაძლებელი.

ამოხსნა:

AB წრფეზე ავიღოთ O წერტილი. გავავლოთ გაშლილი AOB კუთხის ბისექტრისა. მივიღეთ $\angle COB = 90^\circ$. ე.ი. $CO \perp AB$.

ვთქვათ, O წერტილიდან კიდევ შეიძლება გატარდეს AB წრფის მართობული KP წრფე, ე.ი. $KP \perp AB$. მაშინ $\angle KOB = 90^\circ$. მაგრამ $\angle COB = \angle KOB + \angle KOC$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $90^\circ = \angle KOB + 90^\circ$.

მაშასადამე, $\angle KOC = 0^\circ$. რაც იმას ნიშნავს, რომ OC და OK ერთი და იგივე სხივებია.



ყურადღება!

სიბრტყეში მდებარე წრფის ნებისმიერ წერტილზე ამავე სიბრტყეში გაივლება ამ წრფის მართობული ერთადერთი წრფე.



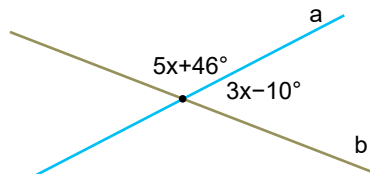
1. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან რომელი ითვლება კუთხედ ამ ორ წრფეს შორის?
2. სიბრტყეში მდებარე წრფეზე აღებული წერტილიდან, ამავე სიბრტყეში, რამდენი მართობის გავლებაა შესაძლებელი ამ წრფის მიმართ?
3. თუ ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ერთ-ერთი კუთხე 160° -ია, მაშინ რისი ტოლია კუთხე ამ ორ წრფეს შორის?



სავარჯიშოები

1. უჯრიან ფურცელზე სახაზავის დახმარებით გაავლეთ ორი ურთიერთმართობული წრფე.
2. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთი კუთხე 90° -ია. დაამტკიცეთ, რომ იმავე ნახაზზე კიდევ სამი კუთხის გრადუსული ზომა იქნება 90° .
3. ჩამოთვლილთაგან რომელი კუთხეები შეიძლება მივიჩნიოთ რომელიმე ორ წრფეს შორის კუთხედ:

ა) 20° ; ბ) 100° ; გ) 90° ; დ) 135° ?
4. მოცემულია OA და OC სხივები, რომლებიც ამავე სიბრტყეში მდებარე OK წრფის პერპენდიკულარულია. დაამტკიცეთ, რომ OA და OC სხივები ან ემთხვევა ერთმანეთს, ან დამატებითი სხივებია.
5. OA და OB წრფეები მართობული წრფეებია. OC სხივი გადის AOB კუთხის გვერდებს შორის. იპოვეთ AOC და COB კუთხეების გრადუსული ზომები, თუ მათი სხვაობა 15° -ია.
6. OM და ON მართობული წრფეებია. OC სხივი გადის MON კუთხის გვერდებს შორის, ხოლო OK სხივი CON კუთხის გვერდებს შორის. მიღებული MOC , COK და KON კუთხეებიდან ერთ-ერთი დანარჩენი ორის სხვაობის ტოლია. იპოვეთ ამ სამი კუთხიდან უდიდესი.
7. იპოვეთ კუთხე, თუ მისი ბისექტრისა ამ კუთხის გვერდის გაგრძელებასთან ადგენს 130° -იან კუთხეს.
8. ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ a და b წრფეებს შორის კუთხის გრადუსული ზომა.



გამეორება

9. რამდენი წრფე გაივლება ორ განსხვავებულ წერტილზე?
10. გადაკვეთის რამდენი წერტილი შეიძლება ჰქონდეს ორ განსხვავებულ წრფეს?
11. მოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთ-ერთი მეორეზე 5° -ჯერ მეტია. იპოვეთ ეს კუთხეები.
12. იპოვეთ კუთხე, თუ მისი ვერტიკალური კუთხის მოსაზღვრე კუთხე 60° -ია.



რას შეძლებთ:

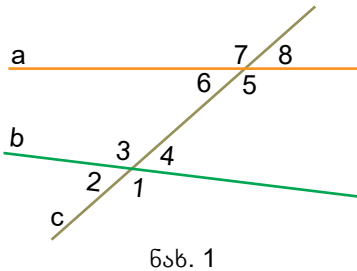
- სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს შორის კუთხის განსაზღვრას;
- წრფის გარეთ მდებარე წერტილიდან ამ წრფისადმი მართობის დაშვებას.

9. წრფეთა პარალელობის ნიშნები



მიზანი:

- გავეცნოთ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებულ კუთხეთა სახელებს და ამ კუთხეების მიხედვით დავადგინოთ, როდის არის მოცემული ორი წრფე პარალელური.



ნახ. 1

რაიმე ფაქტის განმსაზღვრელი ნიშანი მოცემულობების ის უმცირესი რაოდენობაა, რომლის საშუალებითაც შეგვიძლია დავადგინოთ ამ ფაქტის ქეშმარიტება.

სიბრტყეზე ავიღოთ ნებისმიერი ორი a და b წრფე (ნახ. 1). გავავლოთ მესამე c წრფე, რომელიც ორივე წრფეს კვეთს. c წრფის a და b წრფეებთან გადაკვეთისას მიიღება კუთხეები. ეს კუთხეები გადავწვანოთ ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. კუთხეთა წყვილებს, რომლებსაც a და b წრფეებისა და c მკვეთის მიმართ შესაბამისი ადგილი უჭირავს, სპეციალური სახელები აქვს შერჩეული.

$\angle 4$ და $\angle 6$, $\angle 5$ და $\angle 3$ წარმოადგენენ შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეთა წყვილებს;

$\angle 8$ და $\angle 2$, $\angle 7$ და $\angle 1$ წარმოადგენენ გარე ჯვარედინად მდებარე კუთხეთა წყვილებს;

$\angle 4$ და $\angle 5$, $\angle 6$ და $\angle 3$ წარმოადგენენ შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეთა წყვილებს;

$\angle 8$ და $\angle 1$, $\angle 7$ და $\angle 2$ წარმოადგენენ გარე ცალმხრივ მდებარე კუთხეთა წყვილებს;

$\angle 4$ და $\angle 8$, $\angle 1$ და $\angle 5$, $\angle 2$ და $\angle 6$, $\angle 3$ და $\angle 7$ – შესაბამისი კუთხეთა წყვილებია.



ნახ. 1-ის მიხედვით ამოწერეთ ტოლ კუთხეთა წყვილები.

როგორ ორ წრფეს ეწოდება პარალელური წრფეები?

ამ კუთხეების მიხედვით შესაძლებელია დავადგინოთ, იკვეთება a და b წრფეები, თუ პარალელურია.

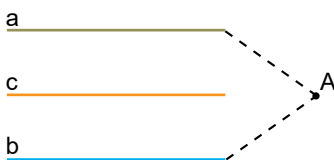
დავადგინოთ წრფეთა პარალელობის ნიშნები.

წრფეთა პარალელობის I ნიშანი:

თუ ორი წრფე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ეს ორი წრფე ურთიერთპარალელურია.

ვთქვათ, მოცემულია ორი, a და b , წრფე (ნახ. 2) და მესამე c წრფე, რომელიც პარალელურია a და b წრფეებისა, ე.ი. $c \parallel a$ და $c \parallel b$. ვაჩვენოთ, რომ $a \parallel b$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, a და b წრფეები იკვეთება რაიმე A წერტილში. მივიღებთ, რომ A წერტილზე, რომელიც c წრფეზე არ მდებარეობს, გავლებულია c წრფის პარალელური ორი წრფე, რაც პარალელურ წრფეთა ძირითადი თვისების თანახმად შეუძლებელია, ე.ი. ასეთი A წერტილი არ არსებობს, რაც იმას ნიშნავს, რომ $a \parallel b$. რ.დ.გ.

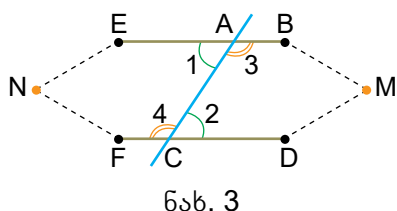


ნახ. 2

წრფეთა პარალელობის II ნიშანი:

თუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი პირობა:

- ა) ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია;
- ბ) შესაბამისი კუთხეები ტოლია;
- გ) ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი 180° -ია, მაშინ ეს წრფეები პარალელურია.



განვიხილოთ ორი, a და b წრფე, რომლებიც მესამე c წრფეს კვეთს, შესაბამისად, A და C წერტილებში (ნახ.3). როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში მიიღება 8 კუთხე. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ტოლია შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები. ვთქვათ, $\angle 1 = \angle 2$, მაშინ ცხადია, $\angle 3 = \angle 4$, როგორც ტოლი კუთხეების მოსაზღვრე კუთხეები. როგორი ურთიერთმდებარეობა აქვს a და b წრფეებს? ისინი შეიძლება იკვეთებოდეს ან იყოს პარალელური.

დავუშვათ, რომ a და b წრფეები ერთმანეთს კვეთს რაიმე M წერტილში. „ამოვჭრათ“ $ABMDC$ ფიგურა და გადავადგილოთ იგი შემდეგნაირად: $\angle ACD$ შევუთავსოთ $\angle CAE$ ($\angle 1 = \angle 2$). $\angle 3$ და $\angle 4$ -ის ტოლობის გამო AB სხივი გაჰყვება CF სხივს, ხოლო CD სხივი AE სხივს. M წერტილი შეუთავსდება რომელიმე N წერტილს. $ABMDC$ ფიგურა შეუთავსდება $CFNEA$ ფიგურას.

მივიღეთ, რომ EB და FD წრფეები იკვეთება ორ M და N წერტილში, რაც წრფის ძირითადი თვისების თანახმად შეუძლებელია. ე.ი. მცდარია ის დაშვება, რომ a და b წრფეები იკვეთება, ამიტომ $a \parallel b$. რ.დ.გ.

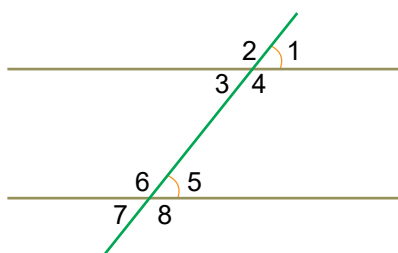
ბ) და გ) შემთხვევები დაასაბუთეთ უკვე დამტკიცებულ ფაქტზე დაყრდნობით.



1. როგორია ორი წრფე, თუ ორივე მესამე წრფის პარალელურია?
2. ჭეშმარიტია თუ არა, რომ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას ამ ორი წრფის პარალელურობა დამოკიდებულია:
 - ა) ჯვარედინად მდებარე კუთხეთა ჯამზე;
 - ბ) ცალმხრივ მდებარე კუთხეთა ჯამზე.
3. ჩამოაყალიბეთ წრფეთა პარალელურობის ნიშნები კუთხეების მიხედვით.

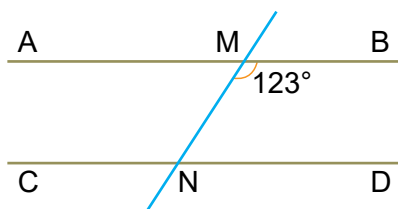


სავარჯიშოები



1. ნახაზზე მოცემულია $\angle 1 = \angle 5$.

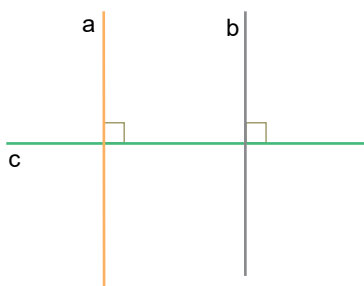
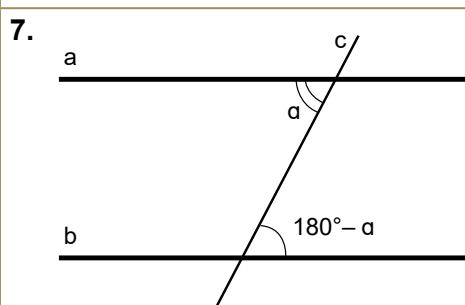
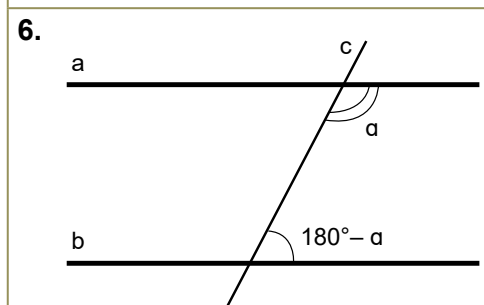
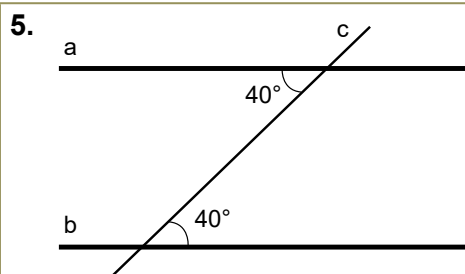
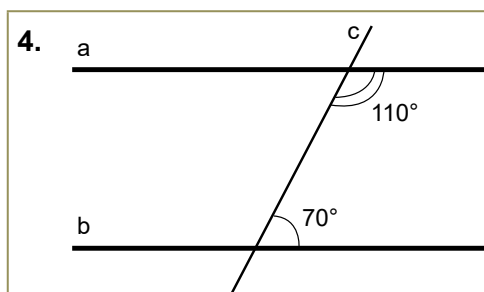
- ა) ამოიწერეთ შესაბამის კუთხეთა ყველა წყვილი და დაასაბუთეთ მათი ტოლობა;
- ბ) ამოიწერეთ ჯვარედინად მდებარე კუთხეთა ყველა წყვილი და დაასაბუთეთ მათი ტოლობა;
- გ) ამოიწერეთ ცალმხრივ მდებარე კუთხეთა ყველა წყვილი და დაასაბუთეთ, რომ მათი ჯამი 180° -ია.



2. რას უნდა უდრიდეს $\angle CNM$, რომ AB და CD წრფეები პარალელური იყოს, თუ $\angle BMN = 123^\circ$?

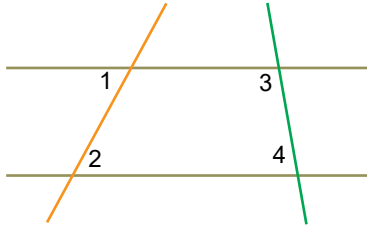
3. ორი AB და CD წრფე გადაკვეთილია მესამეთი. გადაკვეთის შედეგად მიღებულია 70° და 130° -იანი კუთხეები. შეიძლება თუ არა AB და CD წრფეები იყოს პარალელური?

4-7. სავარჯიშოებში დაადგინეთ, პარალელურია თუ არა a და b წრფეები.



8. ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ, გადაკვეთს თუ არა ერთმანეთს a და b წრფეები?

9. ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული შიგა ცალმხრივი კუთხეების შეფარდებაა 4:5. მათი სხვაობა კი 20° -ია. არის თუ არა ეს ორი წრფე პარალელური?



10. ნახაზზე $\angle 1 = \angle 2$ და $\angle 3 = 120^\circ$. რისი ტოლია $\angle 4$?



გამეორება

11. ხუთი რიცხვის ჯამია 1997. ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი 997-ია, რომელიც შეცვალეს 799-ით. იპოვეთ მიღებული ჯამი.
12. ცნობილია, რომ $a \times 9 = 111\,111\,111$. იპოვეთ $a \times 36$.
13. სკოლის სამეცნიერო გამოფენაზე 30 პროექტი წარადგინეს. 16 პროექტს ჰქონდა მოქმედი მაკეტი, 12-ს – საინფორმაციო პოსტერი, 9-ს კი – ორივე. რამდენ პროექტს არ ჰქონდა არც მაკეტი და არც პოსტერი?



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის



1. ტრანსპორტირის დახმარებით დაადგინეთ, რა ზომის კუთხეებია სურათზე? რას ამჩნევთ?



რას შეძლებთ:

- ორი წრფის პარალელობის დადგენას;
- პარალელობის ნიშნების გამოყენებას ამოცანების ამოხსნისას.

10. პარალელურ წრფეთა თვისებები

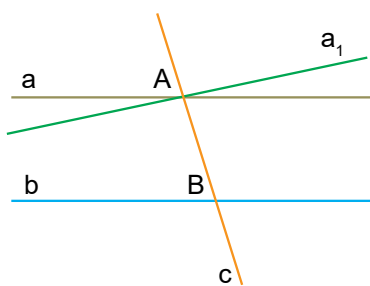


მიზანი:

- გავეცნოთ პარალელურ წრფეთა თვისებებს;
- დავადგინოთ, რა დამოკიდებულებაა პარალელურ გვერდებიან კუთხეებს შორის.

თუ ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამეთი, მაშინ:

- 1) ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია;
- 2) შესაბამისი კუთხეები ტოლია;
- 3) ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამია 180° .



დამტკიცება:

განვიხილოთ ორი a და b პარალელური წრფე და მესამე c წრფე, რომელიც a და b წრფეებს კვეთს შესაბამისად A და B წერტილებში.

რა დამოკიდებულებაა მიღებულ კუთხეებს შორის?

დავუშვათ, A და B წერტილებთან ჯვარედინად მდებარე კუთხეები არ არის ტოლი, მაშინ A წერტილზე გავავლოთ a_1 წრფე ისე, რომ a_1 და b წრფეებითა და c მკვეთით შედგენილი ჯვარედინად მდებარე კუთხეები იყოს ტოლი. წრფეთა პარალელობის ნიშნის თანახმად, $a_1 \parallel b$. მივიღეთ, რომ A წერტილზე გავლებულია b წრფის ორი პარალელური a და a_1 წრფე, რაც შეუძლებელია. ე.ი. a წრფე ემთხვევა a_1 წრფეს. რ.დ.გ.



მართკუთხა სახაზავის გამოყენებით ააგეთ პარალელური წრფეები.

ამოცანა.

ცნობილია, რომ $\angle AOB = \alpha$ მახვილი კუთხეა. $MC \parallel OA$ და $MD \parallel OB$. იპოვეთ CM და MD წრფეებს შორის კუთხე.

ამოხსნა:

როგორც ნახაზზე ვხედავთ, საძიებელი კუთხე შესაძლებელია იყოს $\angle CMD$ ან $\angle CMK$.

$\angle CNB = \angle AOB = \alpha$ ($MC \parallel OA$ და OB მკვეთითა).

$\angle CNB = \angle CMD = \alpha$ ($OB \parallel MD$ და MC მკვეთითა).

ხოლო $\angle CMK = 180^\circ - \angle CMD = 180^\circ - \alpha$.

რადგან α მახვილია, ამიტომ CM და MD წრფეებს შორის კუთხე არის α .

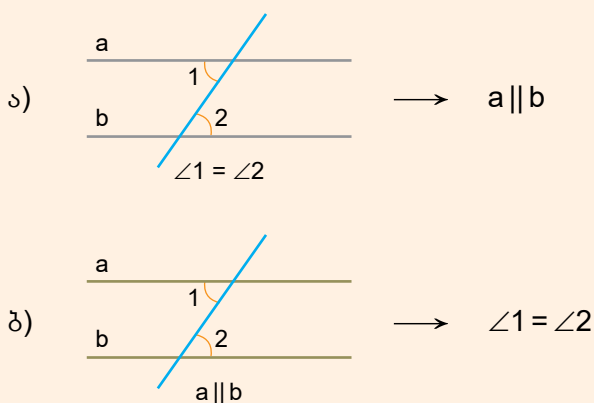
პარალელურ გვერდებიანი კუთხეები ან ტოლია, ან მათი ჯამი 180° -ია.

დაამტკიცეთ, რომ:

1. ერთი და იმავე წრფის ორი მართობული წრფე ურთიერთპარალელურია.
2. თუ წრფე პარალელურ წრფეთაგან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ იგი მეორის მართობულიც არის.

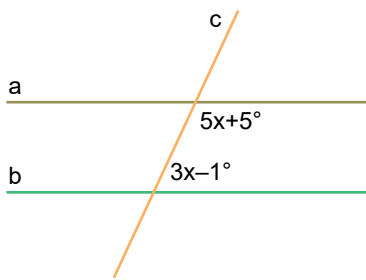


1. ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას რამდენი განსხვავებული ზომის კუთხე შეიძლება მივიღოთ? რა დამოკიდებულებაა ამ კუთხეებს შორის?
2. თუ წრფე ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთის მართობულია, როგორ კუთხეს ადგენს ის მეორე წრფესთან?
3. ნაიკითხეთ სქემატურად მოცემული წინადადებები. რომელია ნიშანი და რომელია თვისება.



სავარჯიშოები

1. ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამეთი. მიღებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი 78° -ის ტოლია. რას უდრის დანარჩენი კუთხეები?
2. ორი პარალელური წრფის მესამეთი კვეთისას მიღებული ორი არაგაშლილი კუთხის სხვაობაა 30° . იპოვეთ ეს კუთხეები.
3. ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ორის ჯამი 70° -ია. იპოვეთ ეს კუთხეები.
4. ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამეთი. შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეების ერთ-ერთი წყვილისა და კიდევ ერთი შიგა კუთხის ჯამია 230° . რას უდრის თითოეული კუთხე?
5. ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული 180° -ზე ნაკლები გრადუსული ზომის კუთხეებიდან ორი კუთხის სხვაობა 100° -ია. იპოვეთ ეს კუთხეები.



6. ორი პარალელური a და b წრფე გადაკვეთეს c წრფით. ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ რამდენი გრადუსის ტოლია x ?
7. ორი პარალელური წრფე მესამე წრფით იკვეთება. შიგა ჯვარედინად მდებარე ორი კუთხის ჯამია 160° . რას უდრის ეს კუთხეები?

8. ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული 180° -ზე ნაკლები გრადუსული ზომის 8 კუთხიდან ერთ-ერთი 37° -ია. რას უდრის დანარჩენი კუთხეების გრადუსული ზომები?
9. ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან რომელიღაც კუთხის ჯამი 172° -ია. იპოვეთ ეს კუთხეები.
10. დაამტკიცეთ, რომ ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული შიგა ცალმხრივი კუთხეების ბისექტრისები ურთიერთმართობულია.
11. ორ პარალელურ წრფესა და მკვეთს შორის შესაბამისი კუთხეების ჯამი 130° -ია. იპოვეთ შიგა ცალმხრივი კუთხეების სხვაობის მოდული.

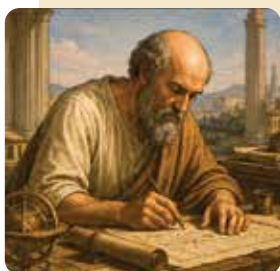


რას შეძლებთ:

- პარალელურ წრფეთა თვისებების გამოყენებას ამოცანების ამოხსნისას, უცნობი კუთხეების პოვნას და მიღებული პასუხების დასაბუთებას.



ეს საინტერესოა



ერატოსთენე
ძვ.წ. 276-194 წწ.
ბერძენი მათემატიკოსი,
გეოგრაფი და ასტრონომი,
ალექსანდრიის ბიბლიოთეკის
ხელმძღვანელი



გეომეტრია მართლაც საოცარი საგანია, ის გვასწავლის, რომ სამყაროს დიდი საიდუმლოებების ამოხსნა, ხშირად, მხოლოდ ლოგიკით და დაკვირვებითაა შესაძლებელი. ამის ნათელი მაგალითია გეომეტრიის ისტორიაში ერთ-ერთი ყველაზე შთამბეჭდავი ფაქტი, თუ როგორ მოახერხა **ერატოსთენე** კირინელმა დედამიწის გარშემოწერილობის გამოთვლა ძვ.წ. III საუკუნეში. მის მიერ მიღებული შედეგი ძალიან ახლოსაა რეალურ მნიშვნელობასთან, რაც გასაოცარია, თუ გავითვალისწინებთ, რომ მის მიერ ჩატარებული გამოთვლები ემყარებოდა მხოლოდ პარალელურ წრფეთა (მზის სხივების) თვისებებს, კუთხის გაზომვას და ორ ქალაქს შორის მანძილის პრიმიტიული ხერხებით გამოთვლას.



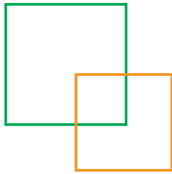
მოცემული თავის დამატებითი
ელექტრონული რესურსები
იხილეთ QR-კოდზე.



II თავის დამატებითი სავარჯიშოები



1. გადაიხაზეთ ნახაზი და გააფერადეთ მოცემული ფიგურების (კვადრატი და სამკუთხედი) თანაკვეთა.

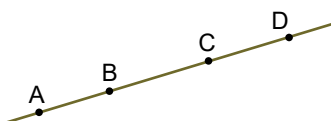


2. გადაიხაზეთ ნახაზი და გააფერადეთ მოცემული ფიგურების გაერთიანება.

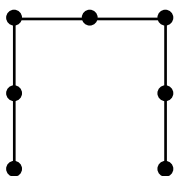


3. ელენემ დაბადების დღის, წრიული ფორმის, ტორტი ნაჭრებად დაჭრა. მან გაჭრა სამჯერ, წრფის გასწვრივ. მაქსიმუმ რამდენ ნაჭერს მიიღებდა ელენე?

4. დახაზეთ ორი სამკუთხედი, რომელთა თანაკვეთა იქნება:
ა) ხუთკუთხედი; ბ) ექვსკუთხედი.
5. დახაზეთ ორი ოთხკუთხედი, რომელთა თანაკვეთა იქნება:
ა) ხუთკუთხედი; ბ) ექვსკუთხედი;
გ) შვიდკუთხედი; დ) რვაკუთხედი.
6. სიბრტყეზე აიღეს ოთხი განსხვავებული A, B, C, D წერტილი. მათგან არცერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. სულ რამდენი წრფე გაივლება წყვილ-წყვილად აღებულ ამ წერტილებზე?
7. სიბრტყეზე აიღეს ოცი განსხვავებული $A, B, C, D, \dots, T$ წერტილი. მათგან არცერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. სულ რამდენი წრფე გაივლება წყვილ-წყვილად აღებულ ამ წერტილებზე?
8. სიბრტყეზე გაავლეს ოთხი განსხვავებული წრფე. შედეგად, რამდენ ნაწილად შეიძლება დაიჭრას ეს სიბრტყე?
9. თუ წრფეზე ავიღებთ n ცალ წერტილს, მაშინ სულ რამდენი სხივი მიიღება? მითითება: განიხილეთ შემთხვევები და შეეცადეთ მიღებული შედეგების განზოგადებას.
10. სიბრტყეზე გაავლეს a წრფე. მიღებული ნახევარსიბრტყეებიდან ერთ-ერთში აიღეს A და B წერტილები (არა a წრფეზე), ხოლო მეორე ნახევარსიბრტყეში C წერტილი (არა a წრფეზე). A, B, C წერტილებიდან ყოველ ორზე გაავლეს წრფე. გადაკვეთის სულ რამდენი წერტილი შეიძლება ჰქონდეს გავლებულ წრფეებს და a წრფეს?
11. წრეწირზე მონიშნეს 5 განსხვავებული A, B, C, D და E წერტილები. სულ რამდენი წრფე გაივლება წყვილ-წყვილად აღებულ ამ წერტილებზე?



12. წრფეზე მონიშნეს A, B, C, D წერტილები. რამდენ სხვადასხვა მონაკვეთს ხედავთ ნახაზზე, რომელთაგან თითოეულს ეკუთვნის B წერტილი?



13. სულ რამდენ მონაკვეთს ხედავთ ნახაზზე, რომელთა ბოლოები გამუქებული წერტილებია?

14. ვთქვათ, მოცემული გაქვს 20 სმ სიგრძის სახაზავი. როგორ დახაზავთ მონაკვეთს, რომლის სიგრძე 20 სმ-ზე მეტი იქნება?

15. საკოორდინატო ღერძზე აიღეს A(3) და B(17) წერტილები. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატი.

16. a წრფის ერთ მხარეში აიღეს B, C, D წერტილები. რამდენი გადაკვეთის წერტილი ექნება BCD სამკუთხედის გვერდებს და a წრფეს?

17. სიბრტყეზე დახაზეს ABC სამკუთხედი. იმავე სიბრტყეში გაავლეს a წრფე, რომელიც არ გადის A, B, C წერტილებიდან არცერთზე. ABC სამკუთხედის რამდენი გვერდი შეიძლება გადაკვეთოს a წრფემ?

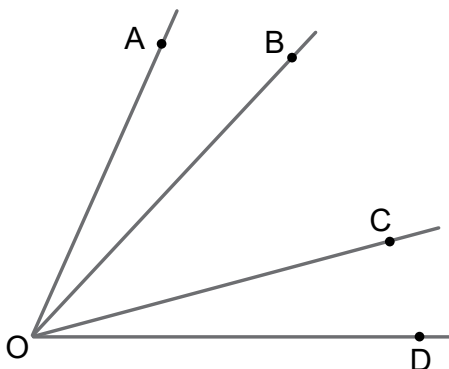
18. ლევანი და ზურა ერთდროულად გაემართნენ თბილისიდან ქუთაისის მიმართულებით ერთი და იმავე გზით და უცვლელი სიჩქარეებით. მოძრაობის დაწყებიდან ორი საათის შემდეგ ლევანი იმყოფებოდა თბილისისა და გორის გზის ზუსტად შუაში, ხოლო ზურა – გორისა და ქუთაისის გზის ზუსტად შუაში. რამდენი კმ/სთ სიჩქარით უფრო სწრაფად მოძრაობს ზურა, თუ თბილისიდან ქუთაისამდე 220 კილომეტრია?

19. წრფეზე მონიშნეს 4 წერტილი P, Q, R, S (ამავე თანმიმდევრობით). ცნობილია, რომ P წერტილიდან დანარჩენ სამ წერტილამდე მანძილთა ჯამია 23 სმ, ხოლო Q წერტილიდან დანარჩენ სამ წერტილამდე მანძილთა ჯამია 17 სმ. იპოვეთ PQ მონაკვეთის სიგრძე.

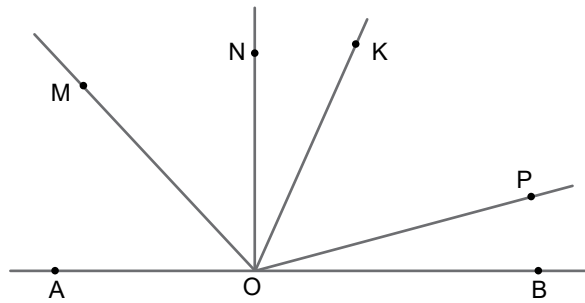
20. იპოვეთ კუთხე საათის და წუთების ისრებს შორის:

ა) 14:00-ზე; ბ) 15:30-ზე.

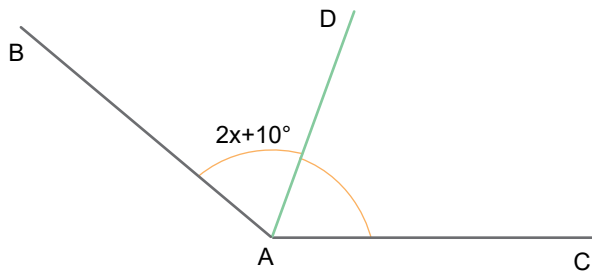
21. ცნობილია, რომ $\angle AOC = 51^\circ$, $\angle BOD = 47^\circ$ და $\angle AOD = 66^\circ$. დაადგინეთ, $\angle BOC$ -ს გრადუსული ზომა.



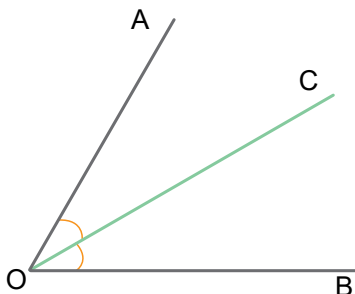
22. ქვემოთ მოცემულ ნახაზზე სულ რამდენი ცალი კუთხის ნაკითხვაა შესაძლებელი (მაგ: $\angle MON$ და $\angle NOM$ ჩათვალეთ ერთ ვარიანტად).



23. MON კუთხის შიდა არეში აიღეს A წერტილი, ხოლო გარე არეში B და C წერტილები. ABC სამკუთხედის რამდენი გვერდი შეიძლება კვეთდეს MON კუთხის ერთ გვერდს მაინც?
24. O წერტილიდან გაავლეს OA ; OB ; OC ; OD სხივები. მაქსიმუმ რამდენი ცალი გაშლილი კუთხე შეიძლება მიიღონ სურათზე?
25. OC სხივი გაავლეს $\angle AOB = 110^\circ$ კუთხის გვერდებს შორის. შედეგად, ნახაზზე არსებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი კუთხე მეორეზე აღმოჩნდა 30° -ით მეტი. რას შეიძლება უდრიდეს $\angle AOC$?
26. AD სხივი წარმოადგენს $\angle BAC = 3x + 50^\circ$ კუთხის ბისექტრისას. ნახაზზე არსებული მონაცემების მიხედვით დაადგინეთ BAC კუთხის გრადუსული ზომა.

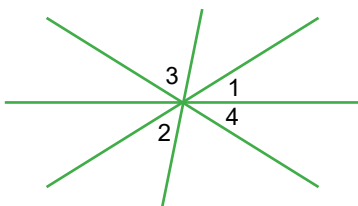


27. OC სხივი წარმოადგენს 120° -ის ტოლი AOB კუთხის ბისექტრისას. ასევე, ცნობილია, რომ $\angle COD = 20^\circ$. რას უდრის AOD კუთხის გრადუსული ზომა?
28. მოცემულია BAC მახვილი კუთხე და ცნობილია, რომ $\angle BAK = \angle KAC$. როგორ ფიქრობთ, AK სხივი აუცილებლად მოცემული კუთხის ბისექტრისაა?



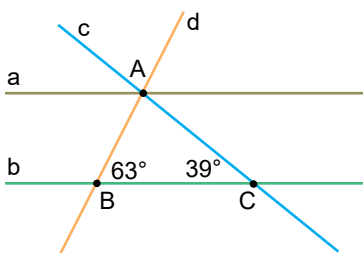
29. OC სხივი წარმოადგენს AOB მახვილი კუთხის ბისექტრისას. ნახაზზე არსებული კუთხეებიდან რომელიღაც ორის გრადუსულ ზომათა ჯამია 120° . დაადგინეთ AOB კუთხის გრადუსული ზომა.

30. მოცემულია 91° -იანი კუთხე და სახაზავი. მხოლოდ ამ მონაცემების გამოყენებით ააგეთ ზუსტად 2° -იანი კუთხე.
31. ერთ ნახაზზე გამოსახეს მოსაზღვრე კუთხეები და მათი ბისექტრისები:
 ა) ყველაზე მეტი რამდენი მართი კუთხე შეიძლება იყოს ნახაზზე?
 ბ) რამდენი ბლაგვი კუთხე შეიძლება იყოს ნახაზზე?
32. MNK გაშლილი კუთხეა, $\angle PNK = 136^\circ$. NQ სხივი PNK კუთხის ბისექტრისაა. დაადგინეთ $\angle MNQ$ კუთხის გრადუსული ზომა.
33. ცნობილია, რომ ABC და CBD კუთხეთა ბისექტრისები ერთმანეთთან ადგენენ მართ კუთხეს. რას უდრის ABD კუთხის გრადუსული ზომა?
34. გაშლილი კუთხე ორი სხივით გაყოფილია სამ კუთხედ, რომელთა გრადუსული ზომები (ამავე თამიმდევრობით) ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $5:8:7$. იპოვეთ კიდურა კუთხეების ბისექტრისებს შორის კუთხე.
35. ვერტიკალური კუთხეებიდან ერთ-ერთის მესამედი 12° -ით ნაკლებია მეორის ნახევარზე. იპოვეთ ამ კუთხეთა გრადუსული ზომები.
36. OC სხივი გადის AOB კუთხის გვერდებს შორის. AOC და COB კუთხეებიდან ერთ-ერთი მეორის $\frac{7}{3}$ -ია, ხოლო მათი სხვაობა 72° -ის ტოლია. აჩვენეთ, რომ AOC და COB კუთხეები მოსაზღვრეა.
37. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან რომელიღაც ორი, არაგაშლილი კუთხის ჯამია 200° . იპოვეთ შესაბამის ნახაზზე არსებული კუთხეებიდან უმცირესის გრადუსული ზომა.
38. დაასაბუთეთ, რომ ვერტიკალური კუთხეების ბისექტრისები ქმნიან გაშლილ კუთხეს.
39. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან რომელიღაც სამის ჯამია 310° . იპოვეთ შესაბამის ნახაზზე არსებული კუთხეებიდან უმცირესის გრადუსული ზომა.

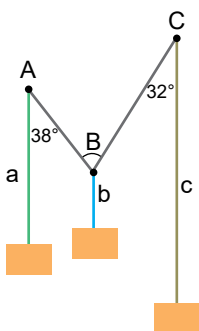


40. ნახაზზე გამოსახულია ოთხი წრფე, რომლებიც ერთ წერტილში იკვეთება. დაამტკიცეთ, რომ

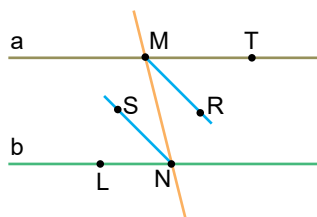
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ.$$



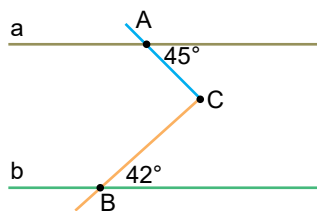
41. a და b წრფეები პარალელურია. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ BAC კუთხის გრადუსული ზომა.



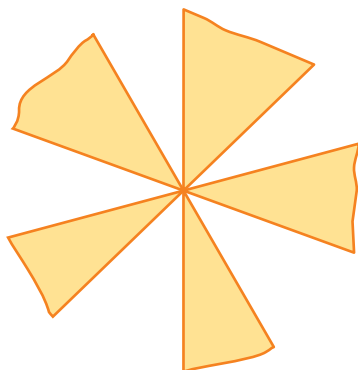
42. a , b , c წრფეები წყვილ-წყვილად პარალელურია. ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ ABC კუთხის გრადუსული ზომა.



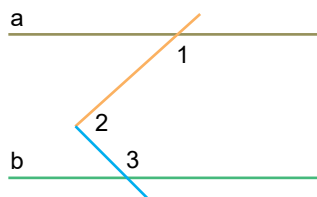
43. a და b წრფეები პარალელურია. MR და NS წარმოადგენენ NMT და MNL კუთხეთა ბისექტრისებს. დაამტკიცეთ, რომ MR და NS წრფეები პარალელურია.



44. a და b წრფეები პარალელურია. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ ACB კუთხის გრადუსული ზომა.



45. ნახაზზე ხუთი წრფე ერთ წერტილში იკვეთება. იპოვეთ გაფერადებული კუთხეების ჯამი.



46. დაამტკიცეთ, რომ
თუ $a \parallel b$, მაშინ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$



II თავის მოკლე მიმოხილვა

- გეომეტრიის იმ ნაწილს, რომელიც ბრტყელ ფიგურებს, მათ თვისებებსა და ურთიერთმდებარეობას შეისწავლის, **პლანიმეტრია** ეწოდება.
- წერტილთა ნებისმიერ სიმრავლეს **გეომეტრიული ფიგურა** ეწოდება.
- წერტილი, წრფე, სიბრტყე – **პირველადი ცნებებია** (პირველადია ცნება, რომელიც უფრო მარტივი ცნებით არ განიმარტება).
- ნებისმიერ ორ წერტილზე ერთადერთი წრფის გავლება შეიძლება – ეს **აქსიომაა** (აქსიომაა წინადადება, რომლის ჭეშმარიტებას დამტკიცების გარეშე ვღებულობთ).
- თუ ორ სხვადასხვა წრფეს საერთო წერტილი აქვს, ვამბობთ, რომ ეს ორი წრფე იკვეთება და ამ წერტილს **გადაკვეთის წერტილს** ვუწოდებთ.
- სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს, რომლებიც არ იკვეთება, **პარალელური წრფეები** ეწოდება.
- სიბრტყეზე მდებარე ორი განსხვავებული წრფე ან იკვეთება, ან პარალელურია.
- წრფეზე არამდებარე წერტილზე ამ წრფის ერთადერთი პარალელური წრფე გაივლება (აქსიომა).
- ერთი და იმავე წრფის ორ განსხვავებულ სხივს, რომელთაც საერთო სათავე აქვთ, **დამატებითი სხივები** ეწოდება.
- ორ მონაკვეთს ეწოდება ტოლი, თუ მათი სიგრძეები ტოლია.
- ორ კუთხეს ეწოდება ტოლი, თუ მათი გრადუსული ზომები ტოლია.
- კუთხის გვერდებს შორის გამავალ სხივს, რომელიც ამ კუთხეს ორ ტოლ ნაწილად ყოფს, **კუთხის ბისექტრისა** ეწოდება.
- 90° -ზე ნაკლებ კუთხეს – **მახვილი**, 90° -ის ტოლ კუთხეს – **მართი**, ხოლო კუთხეს, რომელიც 90° -ზე მეტი და 180° -ზე ნაკლებია **ბლაგვი** კუთხე ეწოდება.
- ორ კუთხეს **მოსაზღვრე** ეწოდება, თუ მათ ერთი გვერდი საერთო აქვთ და დანარჩენი ორი ერთმანეთის დამატებითი სხივებია. მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180° -ია.
- ორ კუთხეს **ვერტიკალური** ეწოდება, თუ მათი გვერდები წყვილ-წყვილად დამატებითი სხივებია. ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.
- ორი წრფე პარალელურია, თუ სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან: შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია, ან შესაბამისი კუთხეები ტოლია ან შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეთა ჯამი 180° -ია.
- თუ ორი წრფე პარალელურია, მაშინ სრულდება: შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია, შესაბამისი კუთხეები ტოლია, შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეთა ჯამი 180° -ია.

თავი III

პროცენტი. პროპორცია. განტოლება



შეისწავლით:

- პროცენტს;
- ძირითად ამოცანებს პროცენტებზე;
- პირდაპირპროპორციულ და უკუპროპორციულ სიდიდეებს;
- რიცხვის დაყოფას მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად;
- წრფივი ერთუცნობიანი განტოლების ამოხსნას.

შეძლებთ:

- პროცენტებთან დაკავშირებული სხვადასხვა ტიპის ამოცანების ამოხსნას;
- პირდაპირპროპორციულ და უკუპროპორციულ სიდიდეებზე ამოცანების ამოხსნას;
- ამოცანების ამოხსნას განტოლების საშუალებით.

1. პროცენტი



მიზანი:

- პროცენტის ცნების გააზრება;
- რიცხვის პროცენტის პოვნა.



პროცენტი მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ცნებაა. სიტყვა „პროცენტი“ წარმოიშვა ლათინური სიტყვიდან „pro centum“ რაც ლათინურად ნიშნავს „ასიდან“, ე.ი. პროცენტი მთელის მეასედს ნიშნავს.

ნებისმიერი a რიცხვისთვის $a\%$ არის წილადი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ a რიცხვი 100-ის რა ნაწილია.

1. იპოვეთ 300-ის: ა) $\frac{4}{15}$; ბ) $\frac{3}{100}$; გ) $\frac{7}{100}$.

2. აქციის დროს ნოუტბუქის ფასმა $\frac{23}{100}$ ნაწილით დაიკლო. რა ღირს ფასდაკლების შემდეგ ნოუტბუქი, თუ მისი თავდაპირველი ფასი 1500 ლარი იყო?

პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას ადამიანები ხშირად იყენებენ სხვადასხვა სიდიდეთა მეასედ ნაწილებს. მაგალითად, მეტრის მეასედი – 1 სმ, საუკუნის მეასედი – წელიწადი, ცენტნერის მეასედი – კილოგრამი, ლარის მეასედი – თეთრი და სხვ. ამიტომ მეასედი ნაწილისათვის სპეციალური სახელიც კი მოიგონეს – პროცენტი.

ერთი პროცენტი ასე აღინიშნება: **1%**.

1% იგივეა, რაც $\frac{1}{100}$ ნაწილი. ე.ი. $1\% = \frac{1}{100}$;

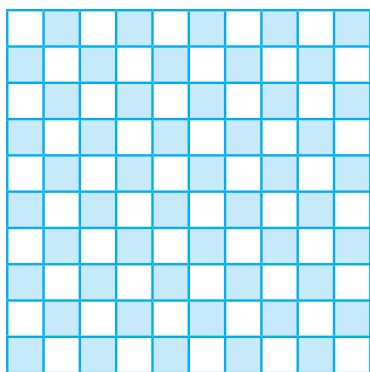
$7\% = \frac{7}{100}$, იკითხება „7 პროცენტი“.

მაგალითად, 1მ-ის 5% არის 1მ-ის $\frac{5}{100}$, რაც 5 სმ-ის ტოლია

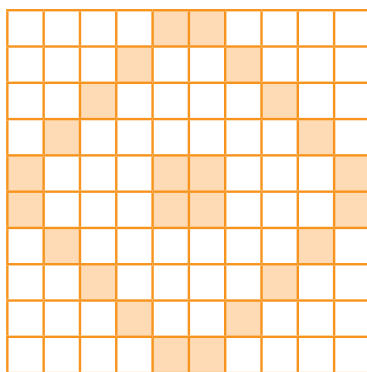
$$\frac{a}{100} = a\% \text{ — იკითხება: „a პროცენტი“} \quad (1)$$

ამოვხსნათ ამოცანა:

დააკვირდით ქვემოთ მოცემულ ფიგურებს და გამოთვალეთ, კვადრატის რამდენი პროცენტია გაფერადებული?

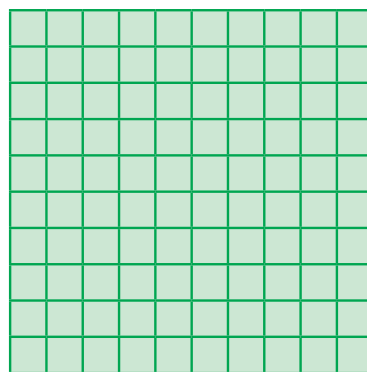


ა)



ბ)

ნახ. 1



გ)

ამოხსნა:

ვხედავთ, რომ სამივე კვადრატი დაყოფილია 100 ტოლ პატარა კვადრატად.

ა) ნახაზზე გაფერადებულია 50 პატარა კვადრატი, ე.ი. $\frac{50}{100}$ ნაწილი, რაც მთელი კვადრატის 50%-ია,

ბ) ნახაზზე გაფერადებულია 24 კვადრატი, რაც დიდი კვადრატის $\frac{24}{100}$ ნაწილია, ე.ი. 24%.

გ) ნახაზზე კი $\frac{100}{100} = 1$, ე.ი. 100%.

რიცხვი რომ პროცენტის სახით ჩავწეროთ, საჭიროა ეს რიცხვი გავამრავლოთ 100-ზე და მარჯვნივ მივუწეროთ %.

მაგალითად, ჩავწეროთ რიცხვები პროცენტის სახით:

ა) $\frac{7}{10}$;

ბ) $\frac{3}{8}$;

გ) 5;

დ) $1\frac{3}{20}$.

ამოხსნა:

ა) $\frac{7}{10} = \frac{7}{10} \cdot 100\% = 70\%$;

ბ) $\frac{3}{8} = 0,375 = 0,375 \cdot 100\% = 37,5\%$;

გ) $5 = 5 \cdot 100\% = 500\%$;

დ) $1\frac{3}{20} = \frac{23}{20} \cdot 100\% = 115\%$.

ე.ი.
 $\frac{a}{100} = a\% \quad (1)$
 $a\% = \frac{a}{100}$

თუ კიდევ ერთხელ დავაკვირდებით (1) ტოლობას, შევამჩნევთ, რომ ასევე შესაძლებელია, პროცენტის სახით მოცემული რიცხვი ჩავწეროთ წილადის ან ნატურალური რიცხვის სახით. ამისათვის კი საჭიროა, პროცენტის სახით მოცემული რიცხვი გავყოთ 100-ზე.

მაგალითად,

$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$; $0,3\% = \frac{0,3}{100} = \frac{3}{1000} = 0,003$;

$200\% = 2$; $140\% = \frac{140}{100} = 1,4$.

რიცხვის პროცენტული ჩანაწერი რომ წილადის სახით ჩავწეროთ, საჭიროა ეს რიცხვი გავყოთ 100-ზე.



მე-7^ა კლასის მოსწავლეთა 30% მათემატიკის წრეზე დადის, 20% კი – მხატვრული კითხვის წრეზე. რამდენი მოსწავლე დადის მათემატიკის და რამდენი მხატვრული კითხვის წრეზე, თუ კლასში 20 მოსწავლეა?

ამოხსნა:

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \quad \left| \begin{array}{l} 20\text{-ის } 30\% \text{ არის } 20\text{-ის } \frac{3}{10}, \text{ მაშასადამე, } 20\text{-ის } \\ 30\% \text{ ტოლია } 20 \cdot \frac{3}{10} = 6; \end{array} \right.$$

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad \left| \begin{array}{l} 20\text{-ის } 20\% \text{ არის } 20\text{-ის } \frac{1}{5}, \text{ მაშასადამე, } 20\text{-ის } \\ 20\% \text{ ტოლია } 20 \cdot \frac{1}{5} = 4. \end{array} \right.$$



იცოდით, რომ

პროცენტის გამოყენება ჯერ კიდევ ძველ ეგვიპტეში, ბაბილონსა და რომში დაიწყო. ვაჭრებსა და მენარმეებს თავისი საქმიანობის გასაფართოებლად დამატებითი სახსრები სჭირდებოდათ, რისთვისაც ლეზულობდნენ სესხად ფულს, მარცვლეულს და სხვ. სესხის დაბრუნებისას კი დამატებით თანხას იხდიდნენ.

ძველი რომაელები კი ტერმინს პროცენტს იყენებდნენ იმ თანხის აღსაწერად, რომელსაც მოვალე კრედიტორს დამატებით უზდიდა. მაგალითად, გასესხებულ 100 სესტერცზე (ძველრომაული ვერცხლის მონეტა) დამატებით იღებდნენ 16 სესტერცს, ანუ 16%-ს.

ე.ი. მათემატიკის წრეზე დადის 6 მოსწავლე, მხატვრულ კითხვაზე კი – 4 მოსწავლე.

ამრიგად,

$$a \text{ რიცხვის } b \text{ პროცენტი ტოლია } a \cdot \frac{b}{100} = \frac{ab}{100}.$$

მაგალითი 2.

თითბერი თუთიისა და სპილენძის შენადნობია. მასში 60% სპილენძია. რამდენ კილოგრამ სპილენძს შეიცავს 20კგ თითბერი?

ამოხსნა:

თითბერი შეიცავს 60% სპილენძს ნიშნავს, რომ 20კგ თითბერის 60% სპილენძია. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ 20კგ-ის 60%.

$$60\% = \frac{60}{100}, \quad 20 \cdot \frac{60}{100} = 12.$$

პასუხი: 20 კგ თითბერი 12 კგ სპილენძს შეიცავს.

მოიფიქრეთ, განხილულ ამოცანაში როგორ დაადგენდით რამდენ კილოგრამ სპილენძს შეიცავდა თითბერი, თუ შენადნობის 20% თუთია იქნებოდა?



- რა ეწოდება რიცხვის მეასედ ნაწილს?
- როგორ ვიპოვოთ რიცხვის 1%; 5%; 27%; 400%?
- რას უდრის რიცხვის 100%?
- როგორ ჩავწეროთ რიცხვი პროცენტის სახით?
- როგორ ჩავწეროთ პროცენტი წილადის ან ნატურალური რიცხვის სახით?
- ჩაწერეთ წილადის ან ნატურალური რიცხვის სახით: 100%; 30%; 0,5%.
- როგორ ფიქრობთ, რომელია მეტი: ა) 50-ის 3% თუ 3-ის 50%;
ბ) 40-ის 18% თუ 18-ის 40%? პასუხი დაასაბუთეთ.



სავარჯიშოები

- ჩაწერეთ წილადი პროცენტის სახით:
ა) $\frac{1}{100}$; ბ) $\frac{7}{100}$; გ) $\frac{3}{50}$; დ) $\frac{4}{25}$;
ე) 0,53; ვ) 2,4; ზ) $1\frac{5}{8}$; თ) 3,9.
- ჩაწერეთ პროცენტი წილადის სახით:
ა) 5%; ბ) 100%; გ) 20%; დ) 0,3%;
ე) $2\frac{3}{5}\%$; ვ) $\frac{4}{7}\%$; ზ) 300% თ) 2,5%.
- გამოთვალეთ:
ა) 100-ის 12%; ბ) 200-ის 15%;
გ) 25-ის 10%; დ) 4,8-ის 25%;
ე) $2\frac{3}{4}$ -ის 16%; ვ) 360-ის 25%-ის 20%.
- რომელია მეტი?
ა) 80-ის 20% თუ 20-ის 80%; ბ) 60-ის 75% თუ 75-ის 60%;
გ) 2,7-ის $\frac{1}{3}\%$ თუ $\frac{1}{3}$ -ის 2,7%; დ) m-ის n% თუ n-ის m%.
- გადაიხაზეთ ცხრილი რვეულში და შეავსეთ ნიშუშის მიხედვით:

a რიცხვის b ნაწილი
ab-ს ტოლია.

პროცენტი	40%			35%				400%	
წილადი	$\frac{40}{100}$		$\frac{55}{100}$		$\frac{7}{8}$		2		
ათწილადი	0,4	0,8				0,003			2,5

- ვაშლი თავისი მასის 84% წყალს შეიცავს. რამდენი წყალია 3 კილოგრამ ვაშლში?
2 გონა ვაშლში?



7. ფეხბურთის ბურთის მასა 450 გრამია, FIFA-ს სტანდარტით მისი მასის 55% სინთეტიკური ტყავია. რამდენი გრამი სინთეტიკური ტყავია საჭირო ორი ბურთის დასამზადებლად?

8. საბავშვო ბალის ჯგუფში 25 ბავშვია, აქედან 60% გოგონაა. რამდენჯერ მეტი გოგონაა, ვიდრე ბიჭი?

9. ალექსანდრემ პირველ დღეს 350 გვერდიანი წიგნის 20% წაიკითხა, მეორე დღეს ორჯერ მეტი, ვიდრე წინა დღეს. რამდენი გვერდი დარჩა წასაკითხი?

10. აპრილში 240 კმ-იანი ავტობანის 40% დაიგო, დარჩენილი გზის 75% კი – მაისში. რამდენი კილომეტრი გზა დაიგო ამ ორი თვის განმავლობაში? კიდევ რამდენი კილომეტრი დარჩა დასაგები?



11. საგამოცდო ბილეთი 20 საკითხისგან შედგება, საკითხების 40% 2-ქულიანია, 30% – 3-ქულიანი, ხოლო დანარჩენი – 4-ქულიანი. რა მაქსიმალური ქულის მიღება შეუძლია მოსწავლეს ამ გამოცდაზე?

12. ეროვნულ მუზეუმში ერთ წელიწადში შესაკეთებლად მიიტანეს 800 დაზიანებული ექსპონატი. წლის ბოლომდე მხოლოდ 68%-ის რესტავრაცია მოესწრო. რამდენი ექსპონატი დარჩა აღსადგენი?

13. რას უდრის a და b დადებითი რიცხვების შეფარდება, თუ a რიცხვის 40% და b რიცხვის 25% ტოლია?



14. ქილაში 1,5 კგ თაფლი ეტევა, ამასთან ნატურალურ თაფლში საშუალოდ 38% ფრუქტოზა და 31% გლუკოზაა. გლუკოზასთან შედარებით რამდენი გრამით მეტი ფრუქტოზაა ერთ ქილა თაფლში?



15. სამეცნიერო მუზეუმის ონლაინ-პლატფორმაზე ბილეთისა და მუზეუმის მაღაზიის ნივთების ერთად შეძენა შეიძლება. მუზეუმის ბილეთი 20 ლარი ღირს. თუ მყიდველი მაღაზიიდან 50 ლარზე მეტის ნივთებს შეარჩევს, ბილეთის ფასზე 15%-იანი ფასდაკლება ვრცელდება. მარიამმა შეარჩია პლანეტების ატლასი 35 ლარად, სამეცნიერო ჟურნალი 12 ლარად და კოსმოსური მისიის სამახსოვრო ბარათი 8 ლარად. თუ მარიამს სულ 100 ლარი აქვს, რა თანხა დარჩება ანგარიშზე?



კვლევითი დავალება

შეარჩიეთ სამი განსხვავებული პროდუქტი და გაეცანით მათ ეტიკეტებს. გამოთვალეთ თითოეულ მათგანში ცხიმისა და შაქრის შემცველობა და შეადარეთ ერთმანეთს. როგორ ფიქრობთ, რატომ არის მნიშვნელოვანი, რომ პროდუქტის ეტიკეტზე მითითებული იყოს ეს ინფორმაცია და როგორ ეხმარება მომხმარებელს არჩევანის გაკეთებაში?



გამეორება

16. მაქსიმუმ რამდენი გადაკვეთის წერტილი შეიძლება ჰქონდეს სიბრტყეზე მდებარე ოთხ წრეს?
17. წრფეზე მიმდევრობით აღებულია A, B, C და D წერტილები. იპოვეთ AD მონაკვეთის სიგრძე, თუ $BC=12,5$ სმ-ს და AB და CD მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის მანძილი 18,8 სმ-ია.



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. მაკამ წაიკითხა 117 გვერდი, რაც წიგნის გვერდების $\frac{3}{4}$ ნაწილია. რამდენგვერდიანია წიგნი?
2. იპოვეთ რიცხვი, თუ მისი $\frac{6}{11}$ ტოლია 72-ის.



რას შეძლებთ:

- რიცხვის ჩანერას პროცენტის სახით და, პირიქით, პროცენტის ჩანერას წილადის სახით;
- რიცხვის პროცენტის პოვნის წესის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნას.

2. რიცხვის პოვნა მისი პროცენტის მიხედვით



მიზანი:

- გავიაზროთ, როგორ ვიპოვოთ რიცხვი მისი პროცენტის მიხედვით.



სკოლის კვლევითი პროექტის მესამე ეტაპზე ჯგუფმა 36 ქულა მიიღო, რაც ამ ეტაპზე შესაძლო მაქსიმალურ ქულაზე 25%-ით ნაკლებია. მაქსიმუმ რამდენი ქულის მიღება იყო შესაძლებელი მესამე ეტაპზე?

განვიხილოთ ასეთი ამოცანა. სტუდენტმა გამოცდაზე 56 ქულა დააგროვა, რაც მაქსიმალური ქულის 70%-ია. რას უდრიდა მაქსიმალური ქულა?

ამოხსნა:

მაქსიმალური ქულა ტოლი იქნება იმ რიცხვის, რომლის 70% არის 56.

$70\% = \frac{7}{10}$. ამრიგად, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ რიცხვი, რომლის $\frac{7}{10}$ არის 56, რისთვისაც საჭიროა 56 გავყოთ $\frac{7}{10}$ -ზე:

$$56 : \frac{7}{10} = 56 \cdot \frac{10}{7} = 80.$$

პასუხი: 80 ქულა.

იმისათვის რომ ვიპოვოთ რიცხვი, რომლის b პროცენტი a რიცხვის ტოლია, საჭიროა a გავყოთ $\frac{b}{100}$.
ე.ი. რიცხვი, რომლის $b\%$ არის a , ტოლია:

$$a : \frac{b}{100} = \frac{a}{b} \cdot 100.$$

1. იპოვეთ რიცხვი, რომლის:

- ა) 30% არის 60;
- ბ) 200% არის 120;
- გ) 0,2% არის 70.

2. პირველ დღეს ტურისტებმა 25 კმ გაიარეს, რაც მთლიანი ტურისტული მარშრუტის 40%-ია. რა მანძილი დარჩათ მათ გასავლელი?

იცოდით, რომ

დედამიწაზე არსებული წყლის მხოლოდ დაახლოებით 2,5%-ია მტკნარი წყალი, ამიტომ მისი რაციონალურად გამოყენება განსაკუთრებულად მნიშვნელოვანია.

მაგალითი 1.

ბიჭვინთის სახელმწიფო ნაკრძალში ცაცხვის, მუხის და ფიჭვის ხეები ხარობს. მათგან მუხა ხეების 35%-ია, ფიჭვი – 40%, ხოლო ცაცხვის ხე 60-ია. სულ რამდენი ხეა ნაკრძალში?

ამოხსნა:

მუხა და ფიჭვი არის ხეების $35 + 40 = 75$ (%). ამიტომ ხეების 25% იქნება ცაცხვი. ე.ი. ნაკრძალში სულ იქნება:

$$60 : \frac{25}{100} = 240 \text{ (ხე)}$$

პასუხი: სულ 240 ხე.



- როგორ ვიპოვოთ რიცხვი, თუ ცნობილია მისი ა) $\frac{5}{6}$; ბ) $\frac{3}{4}$; გ) $\frac{1}{3}$?
- როგორ ვიპოვოთ რიცხვი, თუ ცნობილია მისი 1%? 20%? 50%?
- იპოვეთ რიცხვი, რომლის:
ა) 20% ტოლია 21-ის; ბ) 50% ტოლია 27-ის;
გ) 200% ტოლია 40-ის; დ) 100% ტოლია 30-ის.



სავარჯიშოები

1. იპოვეთ რიცხვი, რომლის:

- | | |
|------------------------------|---|
| ა) 1% არის 1; | ბ) 10% არის 15; |
| გ) 20% არის 35; | დ) 50% არის 210; |
| ე) 100% არის 39; | ვ) 15% არის 45; |
| ზ) 0,8% არის $\frac{1}{5}$; | თ) $3\frac{1}{2}$ % არის $1\frac{1}{6}$. |

2. რომელია მეტი, რიცხვი, რომლის 60% არის 80, თუ რიცხვი, რომლის 80% არის 60?



3. მათემატიკის შემაჯამებელ დავალებაში მაქსიმალური ქულით 6 მოსწავლე შეფასდა, რაც მთელი კლასის მოსწავლეთა რაოდენობის 25%-ია. რამდენი მოსწავლეა კლასში?

4. ზეთისხილის დანურვით 15% ზეთი მიიღება. რამდენი კილოგრამი ზეთისხილია საჭირო:

- ა) 30 კგ; ბ) 75 კგ; გ) 150 კგ; დ) 4,5 ტ
ზეთის მისაღებად?



5. ქადრაკის ტურნირზე ლაზარემ 8 პარტია მოიგო, რაც ნათამაშები პარტიების 80%-ია. სულ რამდენი პარტია ითამაშა ლაზარემ?



6. ვანის ნაქალაქარში იპოვეს კოლხური კერამიკის 1 350 ნატეხი. არქეოლოგების თქმით, ეს ნაპოვნი მასალის 90 %-ია, დანარჩენი 10% ბრინჯაოს და ოქროს ნივთებია. სულ რამდენი არტეფაქტი იპოვეს? მათგან რამდენი იყო ბრინჯაოსა და ოქროს ნივთი?

7. მთამსვლელთა ჯგუფის 37,5%-მა მოახერხა უშბის დალაშქვრა. რამდენი ალპინისტისგან შედგება ჯგუფი, თუ მწვერვალს 9 ალპინისტმა მიაღწია?



8. მგზავრმა 27 კმ გაიარა, რაც მთელი გზის 18%-ია. რამდენი კილომეტრია მთელი გზა? რამდენი კილომეტრი დარჩა კიდევ გასავლელი?
9. $AB=15$ სმ სიგრძის მონაკვეთი AC მონაკვეთის სიგრძის 60%-ს შეადგენს. იპოვეთ BC მონაკვეთის სიგრძე, თუ A , B და C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს. დაფიქრდით, რამდენი ამონახსნი აქვს ამოცანას?



10. რობოტის ბატარეის მუშაობის დრო განახლების შემდეგ 12%-ით გაიზარდა და 168 წუთი გახდა. რამდენი წუთი მუშაობდა ბატარეა განახლებამდე?

11. 15 %-იანი ფასდაკლებით ტელესკოპი 1700 ლარად გაიყიდა. რა ღირდა ტელესკოპი ფასდაკლებამდე?



კვლევითი დავალება

აირჩიეთ რეკლამა, სადაც პროცენტებია გამოყენებული (ფასდაკლება, დანაზოგი და სხვ.). გამოთვალეთ, შეესაბამება თუ არა რეკლამაში მითითებული ინფორმაცია რეალურ მონაცემებს. როგორ ფიქრობთ, შეიძლება თუ არა პროცენტების გამოყენებამ რეკლამა უფრო მიმზიდველი გახადოს?



გამეორება

12. რას უდრის საათის ისრებს შორის კუთხე:

ა) 14:30; ბ) 12:15; გ) 19:45.

13. სახაზავზე აღნიშნულია მხოლოდ სამი დანაყოფი: 0,7 და 11. როგორ გადავდოთ ამ სახაზავის გამოყენებით მონაკვეთი, რომლის სიგრძე 5 ერთეულია?



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. ბიბლიოთეკისთვის 80 წიგნი შეიძინეს. აქედან 45 საბავშვო ლიტერატურაა. შეძენილი წიგნების რა ნაწილია საბავშვო ლიტერატურა?

2. ველოსიპედი 400 ლარი ღირდა. ფასდაკლების შემდეგ მისი ფასი 300 ლარი გახდა. თავდაპირველი ფასის რა ნაწილით შემცირდა ველოსიპედის ფასი?



რას შეძლებთ:

- პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას იპოვოთ რიცხვი, თუ ცნობილია მისი პროცენტი.

3. ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდება



მიზანი:

- ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდების გააზრება.



ბაღში 10 ვაშლის, 5 ქლიავის, 4 მსხლის და 6 ატმის ხეა. ხეხილის რამდენი პროცენტია ბაღში:

ა) ვაშლის ხე; ბ) ქლიავის ხე?

განვიხილოთ ასეთი ამოცანა:

1. 135 გ წყალს შეურიეს 15 გ შაქარი. რამდენ პროცენტ შაქარს შეიცავს ხსნარი?

ამოხსნა:

ხსნარის მასა იქნება: $135 + 15 = 150$ (გ).

ვიპოვოთ, 150 გ ხსნარის რა ნაწილია შაქარი.

$$\frac{15}{150} = \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{10} = 10\%.$$

პასუხი: ხსნარში 10% შაქარია.

იმედია, უკვე ადვილად შეძლებთ პარაგრაფის დასაწყისში დასმული პრობლემის გადაწყვეტას.

2. კახამ წიგნის 120 გვერდი წაიკითხა, თიკამ – 80 გვერდი.
- ა) რამდენი პროცენტით მეტი გვერდი წაიკითხა კახამ, ვიდრე თიკამ?
- ბ) რამდენი პროცენტით ნაკლები გვერდი წაიკითხა თიკამ, ვიდრე კახამ?

ამოხსნა:

ა) ამოცანის პირობიდან ჩანს, რომ კახამ წაიკითხა 40 გვერდით მეტი, ვიდრე თიკამ. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ 40 გვერდი რამდენი პროცენტია 80-ის, რაც იგივეა 40 რა ნაწილია 80-ის.

40 არის 80-ის:

$$\frac{40}{80} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} = 50\%.$$

ამრიგად, კახამ წაიკითხა 50%-ით მეტი გვერდი, ვიდრე თიკამ.

პასუხი: 50%.

ბ) თიკამ წაიკითხა 40 გვერდით ნაკლები, ვიდრე კახამ. ახლა კი უნდა ვიპოვოთ 40 რა ნაწილია 120-ის (კახას მიერ წაკითხულის):

$$\frac{40}{120} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%.$$

პასუხი: $33\frac{1}{3}\%$.

ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდება არის ამ რიცხვების შეფარდება ჩანერგილი პროცენტის სახით.



იცოდით, რომ

მოსახლეობის აღწერის, გამოკითხვებისა და სხვა კვლევების შედეგები ხშირად პროცენტულად არის წარმოდგენილი, რადგან ასე მათი შედარება უფრო მარტივია.



1. VII^ა კლასში 10 გოგონა და 15 ბიჭია.

ა) კლასის მოსწავლეთა რამდენი პროცენტია გოგონების რაოდენობა?

ბ) ბიჭების რაოდენობის რამდენი პროცენტია გოგონების რაოდენობა?

გ) გოგონების რაოდენობის რამდენი პროცენტია ბიჭების რაოდენობა?

2. **a** რიცხვი 30%-ით მეტია **b** რიცხვზე. როგორ ფიქრობთ, იქნება თუ არა **b** რიცხვი **a** რიცხვზე 30%-ით ნაკლები? პასუხი დაასაბუთეთ.



1. რას ეწოდება ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდება?

2. აღწერე, როგორ ვიპოვოთ ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდება.

3. რას გვიჩვენებს ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდება?

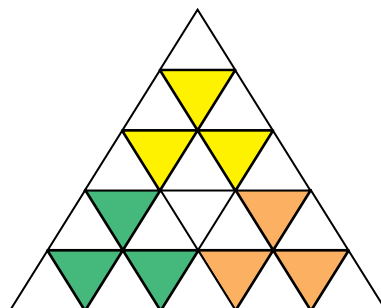
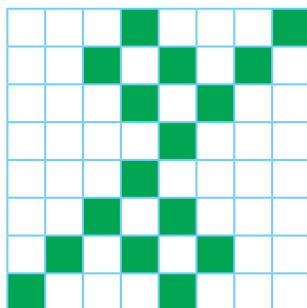
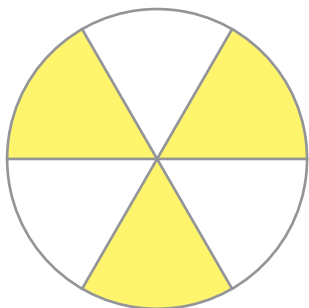


1. გამოთვალეთ:

- ა) 50-ის რამდენი პროცენტია 12;
გ) 75-ის რამდენი პროცენტია 18;
ე) 125-ის რამდენი პროცენტია 55;

- ბ) 36-ის რამდენი პროცენტია 27;
დ) 60-ის რამდენი პროცენტია 24;
ვ) 3,2-ის რამდენი პროცენტია 8?

2. მთელი ფიგურის რამდენი პროცენტია გაფერადებული?



3. რამდენი პროცენტია:

- ა) 3 სმ 100 სმ-ის;
დ) 5 მმ 2 დმ-ის;
ბ) 4 კგ 1 ტ-ის;
ე) 25 კგ 1 ც-ის;
გ) 2 დმ 1 მ-ის;
ვ) 100 მ 2 კმ-ის?

4. გაიხსენეთ დროის ერთეულებს შორის კავშირი და უპასუხეთ კითხვებს:

- 1 წუთის რამდენ პროცენტს შეადგენს 3 წმ;
- 3 სთ-ის რამდენ პროცენტს შეადგენს 15 წთ;
- 2 სთ-ის რამდენ პროცენტს შეადგენს 1 სთ და 15 წთ;
- დღე-ღამის რამდენ პროცენტს შეადგენს 2 სთ და 40 წთ?

5. სამკუთხედის გვერდებია 9 სმ, 10 სმ და 17 სმ. პერიმეტრის რამდენ პროცენტს შეადგენს სამკუთხედის უმცირესი გვერდის სიგრძე? უდიდესი გვერდის სიგრძე?

6. ბებომ 30 კგ ვაშლისგან 3,6 კგ ჩირი დაამზადა. ვაშლის მასის რამდენი პროცენტია მიღებული ჩირის მასა?



7. რამდენ პროცენტიანი ხსნარი მიიღება, თუ 2კგ წყალში გავხსნით 200 გრამ მარილს? როგორ შეიცვლება ხსნარის კონცენტრაცია, თუ მასში კიდევ 200 გრამ მარილს შევურევთ?
8. პირველ დღეს პეტრემ 360 გვერდიანი წიგნის $\frac{1}{6}$ ნაწილი წაიკითხა, მეორე დღეს – დარჩენილის 18% და კიდევ 6 გვერდი. მთელი წიგნის რამდენი პროცენტი წაიკითხა პეტრემ ორი დღის განმავლობაში? კიდევ რამდენი დარჩა წასაკითხი?
9. VII კლასის მოსწავლეებს ორშაბათს 5 გაკვეთილი აქვთ. თითოეული გაკვეთილის ხანგრძლივობა 45 წუთია და გაკვეთილებს შორის 5 წუთიანი შესვენებაა. მთელი დროის რამდენ პროცენტს ატარებენ ბავშვები გაკვეთილებზე?
10. სირბილის აპლიკაციაში ბარბარეს მიზანი იყო კვირაში 150 წუთი ვარჯიში. მან 120 წუთი ივარჯიშა. მიზნის რამდენი პროცენტი შეასრულა და რამდენი პროცენტი არა?
11. კომპანიის 60 თანამშრომლიდან 20% მამაკაცია. თანამშრომელ ქალთა რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენს მამაკაცთა რაოდენობა?
12. ქალაქში, რომელშიც 100 000 მაცხოვრებელია, მოსახლეობა ყოველწლიურად წინა წელთან შედარებით 10%-ით იზრდება. რამდენი პროცენტით მოიმატებს მოსახლეობის რაოდენობა ორი წლის განმავლობაში?
13. თუ ერთ თანამამრავლი გაიზარდა 100%-ით, ხოლო მეორე თანამამრავლი შემცირდა 50%-ით, მაშინ როგორ შეიცვლება ნამრავლის მნიშვნელობა? პასუხი დაასაბუთეთ
14. საბავშვო ოთახი 27 მ²-ია, სამზარეულო კი – 18 მ²-ია. რამდენი პროცენტით მეტი ფართობი აქვს საბავშვო ოთახს, ვიდრე სამზარეულოს?
15. გაშლილი კუთხის გრადუსული ზომის რამდენი პროცენტია α , თუ მისი გრადუსული ზომაა:
ა) 30°; ბ) 45°; გ) 120°; დ) 150°?



გამეორება

16. რიცხვით ლერძზე მონიშნულია $M(-4)$ და $K(8)$ წერტილები. MK მონაკვეთზე იპოვეთ იმ წერტილის კოორდინატი, რომელიც 5-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული M წერტილიდან, ვიდრე K წერტილიდან.
17. იპოვეთ კუთხე მოსაზღვრე კუთხეების ბისექტრისებს შორის.



რას შეძლებთ:

- ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდების გამოთვლას და მიღებული შედეგის გაანალიზებას;
- სხვა საგნებსა და ცხოვრებისეულ სიტუაციებში ამოიცნობთ მათემატიკურ ამოცანებს და გამოიყენებთ პროცენტულ შეფარდებას მათ ამოსახსნელად.

4. ამოცანები პროცენტებზე



მიზანი:

- პროცენტებთან დაკავშირებული სხვადასხვა ტიპის ამოცანების ამოხსნის მეთოდების დაუფლება.



ამოცანა 1.

მობილური ტელეფონი თავდაპირველად 500 ლარი ღირდა. მისი ფასი ჯერ 20%-ით გაიზარდა, შემდეგ კი მიღებული ფასი შემცირეს 20%-ით.

- ა) რა ღირს ფასთა ამ ცვლილების შემდეგ მობილური?
ბ) რამდენი პროცენტით შეიცვალა თავდაპირველი ფასი?

ამოხსნა:

I გზა. ა) გაიზარდა ფასი 20%-ით ნიშნავს, რომ ფასი გაიზარდა 500-ის $\frac{20}{100}$ ნაწილით, მაშასადამე 1-ლი ცვლილების შედეგად მობილურის ფასი გახდა:

$$500 + 500 \cdot \frac{20}{100} = 600 \text{ (ლ)}$$

ფასის მომდევნო ცვლილების შემდეგ მობილურის ფასი გახდებოდა:

$$600 - 600 \cdot \frac{20}{100} = 480 \text{ (ლ)}$$

ბ) დავადგინოთ, 480 რამდენი პროცენტია 500-ის (თავდაპირველი ფასის რამდენი პროცენტია ცვლილების შედეგად მიღებული ფასი).

$$\frac{480}{500} \cdot 100\% = 96\%$$

500 ლარი – 100%

480 ლარი – 96%

ე.ი. თავდაპირველი ფასი შემცირებულია 4%-ით.

II გზა. გაიზარდა 20%-ით – ნიშნავს, გახდა თავდაპირველი ფასის:

$$100\% + 20\% = 120\% \\ 500 \cdot \frac{120}{100} = 600 \text{ (ლ)}$$

ამის შემდეგ შემცირდა 20%-ით ნიშნავს, რომ გახდა 600 ლარის (600 ლ შემცირეს – 600-ია 100%) 80%.

$$600 \cdot \frac{80}{100} = 480 \text{ (ლ)}$$

პასუხი: 480 ლ, შემცირდა 4%-ით.

თუ საქონლის თავდაპირველ ღირებულებას 100%-ად ჩავთვლით, მაშინ a -ით ცვლილების შემდეგ მისი ღირებულება გახდება:

ა) თუ გაიზარდა $(100+a)\%$;

ბ) თუ შემცირდა $(100-a)\%$.

❓ როგორ ფიქრობთ, მობილურის ფასი თავდაპირველად 20%-ით რომ შემცირებულიყო, შემდეგ კი 20%-ით გაძვირებულიყო, საბოლოოდ რა იქნებოდა მობილურის ფასი – თავდაპირველი ფასის ტოლი, მასზე მეტი თუ ნაკლები?
პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოცანა 2.



ჭურჭელში 5 ლ 12%-იანი სპირტხსნარია. მას დაუმატეს 1 ლ წყალი. რამდენ პროცენტია სხნარი მიიღება?

ამოხსნა:

სპირტხსნარი, რომელიც თავდაპირველად იყო ჭურჭელში, შეიცავდა $5 \cdot \frac{12}{100} = 0,6$ ლ სპირტს. 1 ლ წყლის დამატების შემდეგ მიიღება 6 ლ ხსნარი, რომელშიც სპირტი ისევ 0,6 ლიტრია. მიღებული ხსნარის პროცენტული კონცენტრაცია იქნება:

$$\frac{0,6}{6} \cdot 100\% = 10\%.$$

პასუხი: 10%.

ნივთიერების პროცენტული კონცენტრაცია არის ხსნარში გახსნილი ნივთიერების მასის შეფარდება ხსნარის საერთო მასასთან, გამოსახული პროცენტებში.

ამოცანა 3.

რამდენ პროცენტია მარილხსნარი მიიღება, თუ ერთმანეთში შევურევთ 5 ლ 20%-იან და 3 ლ 12%-იან მარილხსნარს?

ამოხსნა:

5 ლ 20%-იანი ხსნარი ნიშნავს, რომ 5 ლ მარილხსნარი შეიცავს 20% მარილს.

$$5\text{-ის } 20\% = 5 \cdot \frac{20}{100} = 1; \quad 3\text{-ის } 12\% = 3 \cdot \frac{12}{100} = 0,36.$$

მაშასადამე, მიღებული 8 ლ ნარევში 1,36 კგ მარილია. მარილის პროცენტული შემცველობა ხსნარში იქნება:

$$\frac{1,36}{8} \cdot 100\% = 17\%.$$

პასუხი: 17%.

ამოცანა 4.

სალომემ დავალების ათი ამოცანა ამოხსნა, ნატომ კი მხოლოდ რვა.

- რამდენი პროცენტით მეტი ამოცანა ამოხსნა სალომემ, ვიდრე ნატომ?
- რამდენი პროცენტით ნაკლები ამოცანა ამოხსნა ნატომ, ვიდრე სალომემ?

ამოხსნა:

ა) სალომემ ამოხსნა ორი ამოცანით მეტი, ვიდრე ნატომ, ე.ი. 8 ამოცანა 100%-ია. უნდა ვიპოვოთ 2 რამდენი პროცენტია 8-ის. $\frac{2}{8} \cdot 100\% = 25\%$

პასუხი: სალომემ 25%-ით მეტი ამოცანა ამოხსნა, ვიდრე ნატომ.

ბ) ნატომ ამოხსნა 2 ამოცანით ნაკლები, ვიდრე სალომემ, ე.ი. 10 ამოცანაა 100% და უნდა ვიპოვოთ 2 რამდენი პროცენტია 10-ის.

$$\frac{2}{10} \cdot 100\% = 20\%$$

პასუხი: ნატომ 20%-ით ნაკლები ამოცანა ამოხსნა.

1. a ლ 40% მარილხსნარს შეურიეს b ლ 20%-იანი მარილხსნარი. როგორ ფიქრობთ, ჩამოთვლილ-თაგან რამდენ პროცენტია სხნარის მიღებაა შესაძლებელი?

- ა) 10%-იანი; ბ) 18%-იანი; ა) 25%-იანი;
დ) 45%-იანი; ე) 60%-იანი; ა) 35%-იანი.

2. ტელევიზორის ღირებულება გაიზარდა 30%-ით, მალევე კი ისევ გაიაფდა 30%-ით. როგორ ფიქრობთ, ახალი ფასი გაუტოლდა ძველ ფასს, მეტია ძველ ფასზე თუ ნაკლები? პასუხი დაასაბუთეთ.

სავარჯიშოები

1. 1500 ლარიანი კონდიციონერი ზაფხულში 20%-ით გაიაფდა, შემოდგომაზე ფასი კვლავ შემცირდა ახალი ფასის 20%-ით. რა ღირს კონდიციონერი ორი გაიაფების შემდეგ? თავდაპირველ ფასთან შედარებით რამდენი პროცენტით გაიაფდა?

2. რამდენ პროცენტია სპირტი მიიღება, თუ ერთმანეთს შევურევთ 30 ლ 50% და 20 ლ 30%-იან სპირტს?



3. საკონდიტრომ თებერვალში 25%-ით მეტი ტორტი გაყიდა იანვართან შედარებით, მარტში კი – თებერვალთან შედარებით 20%-ით ნაკლები. რამდენი პროცენტით მეტი ტორტი გაიყიდა მარტში იანვართან შედარებით, თუ ცნობილია, რომ იანვარში 60 ტორტი გაიყიდა?

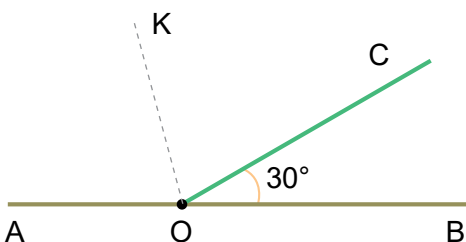
4. მარიამი ერთ ჭიქა ყავაში ერთ ჩაის კოვზ შაქარს ყრის. იპოვეთ შაქრის პროცენტული კონცენტრაცია ყავაში, თუ ერთი ჭიქა ყავა 150 გრამია, ხოლო ერთი ჩაის კოვზი შაქარი 10 გრამი. როგორ შეიცვლება კონცენტრაცია, თუ მარიამი მეორე კოვზ შაქარსაც დაიმატებს?
5. ეროვნულ გალერეაში ლადო გუდიაშვილის გამოფენაზე 50 ნახატიდან 15 პორტრეტი, 10 პეიზაჟი, დანარჩენი კი ნატურმორტი იყო. ნახატების რამდენი პროცენტია ნატურმორტი?
6. $\angle AOB$ გაშლილი კუთხე OC და OD სხივებით გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. რამდენი პროცენტით აღემატება $\angle AOB$ -ს გრადუსული ზომა $\angle COD$ -ს გრადუსული ზომას?
7. პირველი რკინიგზა საქართველოში, ფოთი-თბილისის ხაზი, 1872 წელს გაიხსნა და მისი სიგრძე 300კმ იყო. დღეს საქართველოს რკინიგზის საერთო სიგრძე 1575კმ-ია. რამდენი პროცენტით გაიზარდა რკინიგზის სიგრძე 1872 წლიდან დღემდე?



8. მენარმემ თაფლის ფესტივალისთვის 120 კგ თაფლი ჩამოასხა. 0,5 კგ-იან ქილებში ჩაასხა მთლიანი თაფლის 30%, 1კგ-იან ქილებში 50%-ით მეტი, ხოლო დანარჩენი თაფლაკვერებისთვის დატოვა. 0,5კგ-იანი ქილის ფასია 12ლ, ხოლო 1კგ-იანის – 22ლ. ფესტივალის ბოლოს 0,5კგ-იანი ქილების 75% და 1 კგ-იანი ქილების 80% გაიყიდა.
 - ა) რამდენი ცალი 0,5 კგ-იანი ქილა დაამზადა?
 - ბ) რამდენი ლარის თაფლი გაიყიდა სულ?
 - გ) მთელი შემოსავლის რამდენი პროცენტია 1კგ-იანი ქილების გაყიდვით შემოსული თანხა?

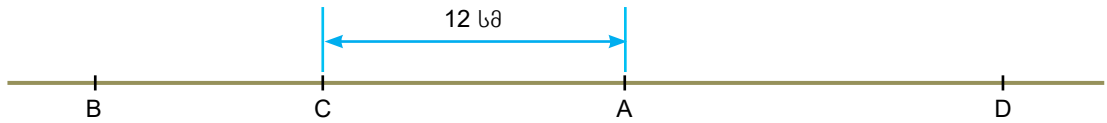
პასუხი დაამრგვალეთ ერთეულებამდე სიზუსტით.

9. გურამს და სოფიკოს დედამ გარგარი მოუტანა, თითოეულს 16-16 ცალი. მაგრამ სოფიკომ ძმას თავისი გარგარის 50% მისცა. შემდეგ კი გურამმაც თავისი გარგარის (რაც დაუგროვდა) 50% სოფიკოს მისცა. საბოლოოდ:
- რომელს უფრო მეტი გარგარი ჰქონდა და რამდენი პროცენტით, სოფიკოს, თუ გურამს;
 - რომელს უფრო ნაკლები გარგარი ჰქონდა და რამდენი პროცენტით სოფიკოს, თუ გურამს?
10. უნივერსიტეტში გამართულ STEM-ფესტივალზე 120 მოსწავლე დარეგისტრირდა. თითოეულმა მოსწავლემ ერთი სესია აირჩია. მოსწავლეების 30% რობოტიკის სესიას დაესწრო. ასტრონომიის სესიას 50%-ით მეტი მოსწავლე დაესწრო, ვიდრე რობოტიკის სესიას. დანარჩენებმა გეომეტრიის სემინარი აირჩიეს. რამდენი მოსწავლე დაესწრო თითოეულ სესიას?
11. ანამ რიცხვი გაზარდა 40%-ით, შემდეგ შეამცირა 40%-ით? როგორ ფიქრობთ, იმავე რიცხვს მიიღებდა? რით ახსნით განსხვავებას?
12. ავტომწარმოებელი კომპანია მანქანის ახალ მოდელს წინა მოდელთან შედარებით 25%-ით ძვირად ყიდის. რა ღირს ძველი მოდელი, თუ ახალი მოდელის ფასი 20 000 ლარია?
13. ყოველწლიურად ოკეანეში 10 მილიონი ტონა პლასტიკი ხვდება, რომლის 80% მდინარეებიდან შედის, დანარჩენი კი სანაპიროდან. მათგან 1,5 მილიონი ტონა თევზჭერის ბადეებია. რამდენი პროცენტით მეტი პლასტიკი შედის მდინარეებიდან, ვიდრე სანაპიროდან?
14. ახალი სასწავლო აპლიკაცია წინა ვერსიასთან შედარებით 25%-ით სწრაფად ხსნის დავალებებს. თუ ახალი ვერსია დავალებას 20 წამში ხსნის, რამდენ წამში ხსნიდა ძველი ვერსია?
15. სამეცნიერო გამოფენისთვის მოსწავლეებს მაკეტის დასამზადებლად მოდელირების თიხა სჭირდებათ. მაღაზიაში თიხა იყიდება სამი ზომის შეფუთვით: 250-გრამიანი, 500-გრამიანი და 1 კგ-იანი. მათი ფასებია შესაბამისად 6 ლარი, 11 ლარი და 20 ლარი. ნოეს სურს იყიდოს 2 კგ მოდელირების თიხა. რამდენ ლარს გადაიხდის ნოე, თუ არჩევანს 1 კგ-იან შეფუთვებზე გააკეთებს? რამდენი პროცენტით მეტს გადაიხდიდა, თუ 250-გრამიან შეფუთვებით იყიდიდა? 500-გრამიანის შემთხვევაში?
16. ერეკლეს დღის მიზანი 10 000 ნაბიჯია, თუმცა დღეს მხოლოდ 7 800 ნაბიჯი იარა. რამდენი პროცენტით შეასრულა მიზანი?



17. $\angle AOC$ და $\angle BOC$ მოსაზღვრე კუთხეებია. OK არის $\angle AOC$ -ს ბისექტრისა. ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ, $\angle AOK$ კუთხის გრადუსული ზომის რამდენი პროცენტია $\angle COB$ კუთხის გრადუსული ზომა.

18. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ BD მონაკვეთის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ BC მონაკვეთის სიგრძე 25%-ით ნაკლებია AC -ს სიგრძეზე, ხოლო AD მონაკვეთის სიგრძე კი 25%-ით მეტია AC -ს სიგრძეზე.



გამეორება

19. რამდენი სამნიშნა რიცხვია, რომლის ჩანაწერში ციფრები არ მეორდება?
20. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან რომელიღაც სამი კუთხის ჯამი 84° -ია. იპოვეთ თითოეული კუთხის გრადუსული ზომა.



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

- გაიხსენეთ, რას ეწოდება პროპორცია?
- რა თვისებები აქვს პროპორციას?
- $4 \cdot 9 = 3 \cdot 12$ ტოლობის მიხედვით შეადგინეთ პროპორცია.
- იპოვე მანძილი გორიდან გელათამდე, თუ ეს მანძილი რუკაზე 23 სმ-ია, ხოლო რუკის მასშტაბია 1:5 000 000.



რას შეძლებთ:

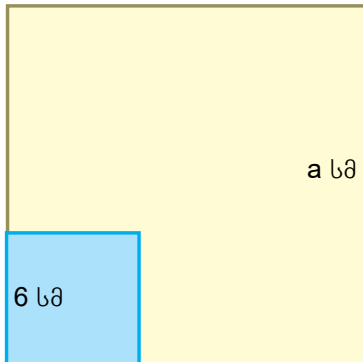
- ამოცანების ამოხსნას პროცენტულ ცვლილებაზე.
- პროცენტებზე სხვადასხვა ტიპის პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას შეარჩიოთ შესაბამისი მეთოდი.

5. პირდაპირპროპორციული სიდიდეები



მიზანი:

- შევისწავლოთ ორ სიდიდეს შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება.



კვადრატის გვერდი 6 სმ-ია.

ა) იპოვეთ კვადრატის პერიმეტრი;

ბ) გამოთქვით ვარაუდი, როგორ შეიცვლება კვადრატის პერიმეტრი, თუ მისი გვერდი გაიზრდება 2-ჯერ? 5-ჯერ? შემცირდება 3-ჯერ?

პასუხი დაასაბუთეთ.

განვიხილოთ ამოცანა:

ავტომობილი მოძრაობს 70 კმ/სთ მუდმივი სიჩქარით. რა მანძილს გაივლის ის 3 სთ-ში? 6 სთ-ში?

ამოხსნა:

ავტომობილი მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით, ნიშნავს, რომ იგი ყოველ საათში გადის ერთსა და იმავე მანძილს, 70 კმ-ს.

ე.ი. ავტომობილი 3 სთ-ში გაივლის $3 \cdot 70 = 210$ კმ-ს, 6 საათში კი $6 \cdot 70 = 420$ კმ-ს.

შევადგინოთ ცხრილი:

მოძრაობის დრო (სთ)	1	2	3	4	5	6	7
გავლილი მანძილი (კმ)	70	140	210	280	350	420	490

ცხრილიდან კარგად ჩანს, რომ რამდენჯერაც გაიზარდა მოძრაობის დრო, იმდენჯერ გაიზარდა გავლილი მანძილი და პირიქით, რამდენჯერაც შემცირდა მოძრაობის დრო, იმდენჯერ შემცირდა გავლილი მანძილიც. ასეთ დროს ამბობენ, რომ სიდიდეებს შორის არსებობს **პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება**, თვით ამ სიდიდეებს კი პირდაპირპროპორციულ სიდიდეებს უწოდებენ.

ორ სიდიდეს **პირდაპირპროპორციული** ეწოდება, თუ ერთ-ერთი სიდიდის რამდენჯერმე გაზრდა (შემცირება) იწვევს მეორის იმდენჯერვე გაზრდას (შემცირებას).

ზემოთ მოცემული ცხრილიდან კარგად ჩანს, რომ გავლილი მანძილის შეფარდება შესაბამის დროსთან მუდმივი სიდიდეა:

$$\frac{70}{1} = \frac{140}{2} = \frac{210}{3} = \frac{280}{4} = \dots = 70.$$



იცოდით, რომ

სტამბაში ფერადი გამო-სახულება მხოლოდ ოთხი ძირითადი საბეჭდი ფერით იქმნება: ცისფერი (Cyan), ჟოლოსფერი (Magenta), ყვითელი (Yellow) და შავი (Key/Black). სხვადასხვა ფერის მისაღებად ეს საღებავები სხვადასხვა პროპორციით იდება ქაღალდზე. მაგალითად, ყვითლისა და ცისფრის შერევით მიიღება მწვანე, ხოლო ჟოლოსფრისა და ყვითლის შერევით — წითელი. ფერების პროპორციების შეცვლით მილიონობით განსხვავებული ელფერის შექმნა შესაძლებელია.

პირდაპირპროპორციულ სიდიდეთა შესაბამისი მნიშვნელობების შეფარდება მუდმივი სიდიდეა.

პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია, მაგალითად, რუკაზე ორი პუნქტის შესაბამის წერტილებს შორის მანძილი და ამ პუნქტებს შორის რეალური მანძილი; შესრულებული სამუშაოს რაოდენობა და ამ სამუშაოს შესრულებაზე დახარჯული დრო და სხვა.

მაგალითი 1.

შეავსეთ ცხრილი, თუ ცნობილია, რომ x და y სიდიდეებს შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებაა.

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2

თუ $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$, მაშინ x და y ცვლადებს შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება არსებობს.

x	0,2	0,8		1,6	
y	0,6		3		8,4

ამოხსნა:

ვიპოვოთ, პირველ სვეტში მოცემული x -ისა და მისი შესაბამისი y -ის მნიშვნელობათა შეფარდება.

$y : x = 0,6 : 0,2 = 3$. მეორე და მეოთხე სვეტის შესავსებად x -ის მოცემული მნიშვნელობები უნდა გავამრავლოთ 3-ზე, ხოლო მესამე და მეხუთე სვეტის შესავსებად კი y -ის მოცემული მნიშვნელობები გავყოთ 3-ზე.

მივიღებთ ასეთ ცხრილს:

x	0,2	0,8	1	1,6	2,8
y	0,6	2,4	3	4,8	8,4

მაგალითი 2.

150გ ნაღების კარაქი 120გ ცხიმს შეიცავს. რამდენ გრამ ცხიმს შეიცავს 5კგ კარაქი.

გავიხსენოთ:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

პროპორციაში კიდურა წევრების ნამრავლი შუა წევრების ნამრავლის ტოლია:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

ამოხსნა:

ვთქვათ, 5 კგ = 5000 გ კარაქი შეიცავს x გ ცხიმს. რადგან ამ სიდიდეებს შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებაა, მივიღებთ:

$$\frac{5000}{150} = \frac{x}{120}$$

$$x = 4000 \text{ (გ)}$$

პასუხი: 5კგ კარაქი შეიცავს 4000 გ ცხიმს.



1. როგორ სიდიდეებს ეწოდება პირდაპირპროპორციული სიდიდეები?
2. როგორი დამოკიდებულება არსებობს პირდაპირპროპორციული სიდიდეების შესაბამის მნიშვნელობებს შორის?
3. მოიყვანეთ პირდაპირპროპორციული სიდიდეების მაგალითები.
4. მოიყვანეთ ისეთი სიდიდეთა მაგალითები, რომელთა შორის არ არის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება.



კვლევითი დავალება

შეარჩიეთ ნებისმიერი კერძის რეცეპტი. ივარაუდეთ, როგორ შეიცვლება ინგრედიენტების რაოდენობა, თუ ულუფების რაოდენობას გააორმაგებთ ან გაასამმაგებთ. გადაამოწმეთ თქვენი ვარაუდი გამოთვლით. როგორ ფიქრობთ, არის ინგრედიენტი, რომელიც შეიძლება პროპორციულად არ შეიცვალოს?



სავარჯიშოები

1. მოცემულია x და y -ს შორის დამოკიდებულების ამსახველი რამდენიმე ცხრილი:

ა)

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16

გ)

x	1	1,5	2	2,5
y	6	9	12	15

ბ)

x	1	3	6	9
y	2	6	12	20

დ)

x	2,3	5	7,2	11
y	3,2	0,5	2,7	11

გაანალიზეთ მონაცემების ცვლილება და დაასაბუთეთ, რომელი ცხრილი აღწერს სიდიდეებს შორის პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას და რომელი არა.

2. ანდრიამ 3 კგ კივი გადიახდა 5,1 ლარი. რა ღირს 1 კგ კივი? 2,5 კგ კივი?

3. რა მანძილს გაივლის 90 კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილი:

- ა) ნახევარ საათში; ბ) 2,5 სთ-ში; გ) 20 წუთში?

როგორ შეიცვლება თითოეულ შემთხვევაში განვლილი მანძილი, თუ ავტომობილი სიჩქარეს 1,5-ჯერ გაზრდის?

რა დამოკიდებულებაა ავტომობილის სიჩქარესა და განვლილ მანძილს შორის?



4. სკოლის ტექნოლოგიურ კლუბში 3D პრინტერი 6 ერთნაირ პატარა დეტალს 14 წუთში ამზადებს. იმავე სიჩქარით მუშაობისას, რამდენი წუთი დასჭირდება 9 დეტალის დამზადებას?

5. ხუთი ბოთლი მინერალური წყალი 6 ლარი ღირს. რა ღირს 1 ბოთლი წყალი? რამდენი ბოთლი მინერალური წყალი შეგიძლია იყიდოთ 18 ლარად?
6. 18 მ^2 ზედაპირის შესაღებად 3 ლიტრი საღებავია საჭირო.
 - 1 ლიტრი საღებავი რამდენ კვადრატულ მეტრს ღებავს?
 - 120 მ^2 ფართობისთვის რამდენი ლიტრი საღებავია საჭირო?
7. 6 ორცხობილას გამოსაცხობად ბებოს 300 გ ფქვილი და 150 გ შაქარი სჭირდება. 15 ორცხობილის გამოსაცხობად რამდენი გრამი ფქვილი და შაქარი იქნება საჭირო?
8. რუკის მასშტაბია $1 : 1\,000\,000$ ნიშნავს, რომ რუკაზე 1 სმ სიგრძის მონაკვეთი რეალურად 10 კმ-ია.
 - თბილისი – ბათუმი პირდაპირი ხაზით 260 კმ-ია. რამდენი სანტიმეტრი იქნება რუკაზე?
 - თუ რუკაზე თელავი – თბილისი 9,5 სმ-ია, რა მანძილია რეალურად ქალაქებს შორის?



1:1000000 ნიშნავს, რომ რუკის 1 სმ სიგრძის მონაკვეთში იგულისხმება რეალური 1000000 სმ.

$1000000\text{ სმ} = 10000\text{ მ} = 10\text{ კმ}$

9. რუკაზე თბილისიდან გორამდე მანძილი 8,5 სმ-ია, რეალურად კი 85 კმ-ია. იპოვეთ რუკის მასშტაბი.
10. მოსწავლემ რუკის მასშტაბი $1 : 25000$, შეცდომით $1 : 250000$ -ად წაიკითხა. რუკაზე გაზომა მდინარის სიგრძე და 8 სმ რომ მიიღო, თქვა, რომ რეალურად მდინარე 20 კმ-ია.
 - რას უპასუხებდა მოსწავლე, მასშტაბი სწორად რომ წაეკითხა?
 - რა სიგრძის იქნებოდა ეს მდინარე $1 : 20000$ მასშტაბის რუკაზე?

11. ველოსიპედისტმა 2 სთ-ში 14 კმ გაიარა. რა მანძილს გაივლის იმავე სიჩქარით 3 სთ-ში? რა მანძილს გაივლის 1,5 სთ-ში, თუ სიჩქარეს 2-ჯერ გაზრდის?
12. პრინტერი 4 წუთში 42 გვერდს ბეჭდავს. რამდენ გვერდს დაბეჭდავს 18 წუთში 2 ასეთი პრინტერი ერთად?
13. დააკვირდით ცხრილს:

პლანეტები	დედამინა	მერკური	ვენერა	მარსი	იუპიტერი	სატურნი	ურანი	ნეპტუნი	პლუტონი
ასტრონავტის მასა (კგ)	100	37	88	38	264	115	117	118	5

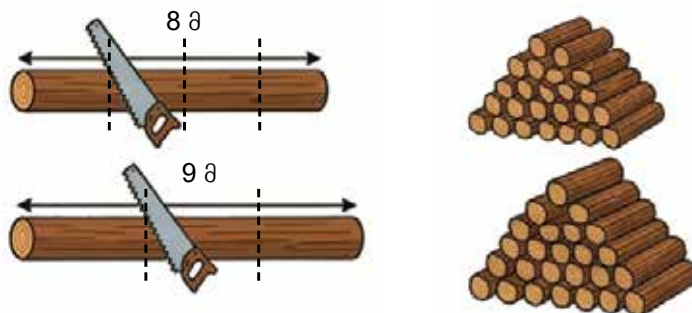
მონაცემების მიხედვით დაადგინეთ და უპასუხეთ შეკითხვებს:

- 1) თუ ასტრონავტის მასა პლანეტა მერკურიზე 30 კგ-ია, რისი ტოლია მისი მასა დედამინაზე?
- 2) თუ დედამინაზე ასტრონავტის მასა 120 კგ-ია, გამოთვალეთ მისი მასა:
 - ა. მარსზე;
 - ბ. სატურნზე.



გამეორება

14. აუზს I ტუმბო 12 სთ-ში ავსებს, II ტუმბო – 15 სთ-ში, III ტუმბო კი 20 სთ-ში. რამდენ საათში აავსებს აუზს სამივე ტუმბო ერთად?
15. 100 ცალი 8 მეტრიანი ერთნაირი მორის 2 მეტრიან მორებად დახერხვას ნახევარი საათი სჭირდება. რა დრო დასჭირდება ასეთივე 180 ცალი 9 მეტრიანი მორის 3 მეტრიან მორებად დახერხვას?



რას შეძლებთ:

- ამოიცნოთ ორ სიდიდეს შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება;
- ცხოვრებისეული ამოცანების ამოხსნას პირდაპირპროპორციული სიდიდეების თვისების გამოყენებით.

6. რიცხვის დაყოფა მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად



მიზანი:

- რიცხვის მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად დაყოფის წესის გააზრება და შესწავლა.



ერთმა მქსოველმა 7 ერთნაირი ხალიჩა მოქსოვა, მეორემ კი – 5 ისეთივე ხალიჩა, რაშიც მათ 1500 ლარი გადაუხადეს. როგორ უნდა გაინაწილონ მქსოველებმა ეს თანხა?

ამოვხსნათ ასეთი ამოცანა:

85 გ ოქროს შენადნობში სუფთა ოქროსა და ვერცხლის შეფარდება ტოლია 3:2. რამდენი გრამი სუფთა ოქრო და რამდენი გრამი ვერცხლია შენადნობში?

ამოხსნა:

ამოცანის პირობიდან ჩანს, რომ შენადნობში ოქრო 3 ნაწილია, ხოლო ვერცხლი 2 ნაწილი, თუ დავუშვებთ, რომ თითოეული ნაწილის მასა არის x გ, მაშინ შენადნობში $3x$ გ იქნება სუფთა ოქრო და $2x$ გ ვერცხლი. მივიღებთ განტოლებას

$$3x + 2x = 85$$

$$5x = 85$$

$$x = 17$$

ე.ი. შენადნობში იქნება $3 \cdot 17 = 51$ (გ) სუფთა ოქრო და $2 \cdot 17 = 34$ (გ) ვერცხლი. როგორც ხედავთ, 85 წარმოადგინეთ ისეთ ორ შესაკრებად, რომლებიც პროპორციულია 3-ის და 2-ის, $51 : 34 = 3 : 2$. ასეთ დროს ამბობენ, რომ 85 დავეყავით 3-ისა და 2-ის პროპორციულ ნაწილებად,

რიცხვი დავყოთ მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად ნიშნავს, რომ ეს რიცხვი დავყოთ ისეთ შესაკრებად, რომლებიც მოცემული რიცხვების პროპორციულია.

შეფარდების ძირითადი თვისება

შეფარდება არ შეიცვლება, თუ მის წევრებს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ერთსა და იმავე ნულის არატოლ რიცხვზე.

მაგალითი 1.

144 დაყავით 0,4-ის, 1,4-ის და 0,6-ის პროპორციულ ნაწილებად.

ამოხსნა:

ე.ი. 144 უნდა დავყოთ ისეთ სამ შესაკრებად, რომლებიც პროპორციულია 0,4-ის, 1,4-ის და 0,6.

$$144 = a + b + c \text{ და } a : b : c = 0,4 : 1,4 : 0,6 \quad (1)$$

$$a : b : c = 2 : 7 : 3 \quad (2)$$

„ $\equiv$ “ — აღვნიშნოთ.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $a \equiv 2x$, მაშინ $b = 7x$, $c = 3x$ მივიღეთ

$$2x + 7x + 3x = 144$$

$$12x = 144$$

$$x = 12.$$

აქედან $a = 2x = 2 \cdot 12 = 24$;

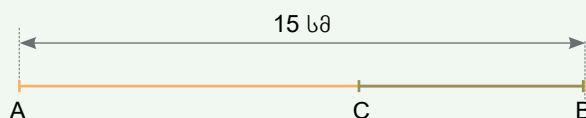
$$b = 7x = 7 \cdot 12 = 84$$
;

$$c = 3x = 3 \cdot 12 = 36.$$

პასუხი: 24; 84; 36.

როგორ ფიქრობთ, რატომ შევცვალეთ (1) შეფარდების წევრები მთელი რიცხვებით?

1. მოცემულია, რომ $AC : BC = 3 : 2$, ნახაზის მიხედვით იპოვეთ AC და BC მონაკვეთების სიგრძე.



2. მოცემული შეფარდება შეცვალეთ მთელი რიცხვების შეფარდებით:

ა) $1,2 : 1,5 : 0,9$;

ბ) $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} : \frac{1}{3}$.

სშირად ორმაგ $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$
პროპორციას ასე წერენ
 $a : b : c = x : y : z$

იმატყველე სწორად!

$$a : b : c = 2 : 5 : 8$$

a ისე შეეფარდება b -ს და შეეფარდება c -ს,
როგორც 2 შეეფარდება 5-ს და შეეფარდება 8-ს.



1. რას ნიშნავს, დავყოთ რიცხვი მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად?
2. რაში მდგომარეობს შეფარდების ძირითადი თვისება?



სავარჯიშოები

- 20 დაყავით 2-ის და 3-ის პროპორციულ ნაწილებად;
 - 96 დაყავით 3-ის და 5-ის პროპორციულ ნაწილებად;
 - 300 დაყავით 2-ის, 5-ის და 8-ის პროპორციულ ნაწილებად;
 - 154 დაყავით $\frac{7}{12}$ -ის, $\frac{3}{4}$ -ია და $\frac{1}{2}$ -ის პროპორციულ ნაწილებად.
- თუ $a : b = 2 : 5$ და $b : c = 5 : 7$, მაშინ რას უდრის $a : b : c$?
 - თუ $a : b = 2 : 3$ და $b : c = 3 : 5$, მაშინ რას უდრის $a : b : c$?
- სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $4 : 6 : 9$. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე, თუ პერიმეტრი 11,4 დმ-ია.
- გამოსახეთ შეფარდება ნატურალური რიცხვების შეფარდების სახით:
 - $\frac{2}{3} : 1 : 2$;
 - $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$;
 - $\frac{1}{2} : \frac{5}{6} : \frac{5}{8}$.
- რობოტიკის კლუბის ორ ჯგუფს პროექტში 45 და 75 საათი აქვს დახარჯული. მათ 16 000 ქულა უნდა გაუნაწილდეს შეტანილი სამუშაო საათების პროპორციულად. რამდენი ქულა მიიღებს თითოეული ჯგუფი?
- წილადის შეკვეცის შემდეგ მოსწავლემ $\frac{3}{11}$ მიიღო. იპოვეთ თავდაპირველი წილადის მრიცხველი, თუ მნიშვნელი 121-ის ტოლი იყო.



- ბრინჯაოს დასამზადებლად იყენებენ სპილენძს და კალას $4 : 1$ პროპორციით. ეკლესიისთვის 115 კილოგრამიანი ბრინჯაოს ზარის დასამზადებლად რამდენი კილოგრამი სპილენძი და რამდენი კილოგრამი კალაა საჭირო? თუ ერთი კილოგრამი სპილენძი 25 ლარი, ხოლო კალა – 70 ლარი ღირს, რა ღირებულების ლითონია საჭირო?

- XII საუკუნეში ვარძია იყო ქალაქ-მონასტერი, არქეოლოგების მიხედვით, გამოქვაბულები საცხოვრებელი, საეკლესიო და სათავსო-სამეურნეო დანიშნულებით $3 : 1 : 2$ პროპორციით იყო განაწილებული. რამდენი გამოქვაბული იყო საცხოვრებელი დანიშნულების, თუ სულ 600 გამოქვაბული იყო?

ვარძიის კლდეში ნაკვეთი სამონასტრო კომპლექსი (XII-XIII სს.)





9. დიდგორის ბრძოლის (1121 წ.) დროს დავით აღმაშენებლის ლაშქარში 56 000 მეომარი იყო. ისტორიული წყაროების მიხედვით, ქართველები, ყივჩაღები და სხვა მოკავშირეები 5 : 1 : 1 პროპორციით იყვნენ. რამდენით მეტი ქართველი იბრძოდა ყივჩაღებთან შედარებით?

10. ორი კვადრატის გვერდი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3 : 7. როგორ შეეფარდება მათი პერიმეტრები? როგორ ფიქრობთ, იგივე იქნება თუ არა ფართობების შეფარდება? (პასუხი დაასაბუთეთ)
11. MN მონაკვეთი M წერტილის მხრიდან 2:5:9 პროპორციულ ნაწილებად არის დაყოფილი. იპოვეთ უდიდესი მონაკვეთის სიგრძე, თუ დანარჩენი ორი მონაკვეთის შუაწერტილებს შორის მანძილი 7 სმ-ია.
12. ევერესტისა და იალბუზის სიმაღლეების შეფარდებაა 888 : 563, იალბუზისა და მყინვარწვერის კი – 563 : 500. გამოთვალეთ თითოეული მწვერვალის სიმაღლე, თუ ცნობილია, რომ მყინვარწვერი იალბუზზე 630 მეტრით დაბალია.
13. ნინოს და ნანას თანხები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:7. ნანამ 15 ლარად ნიგნი იყიდა, 2 ლარად კალამი და 5 ლარი ნინოს აჩუქა, რის შემდეგაც გოგონებს თანაბარი რაოდენობის თანხა გაუხდათ. რა თანხა ჰქონდა თითოეულ მათგანს თავდაპირველად?
14. თითბერი სპილენძის და თუთიის შენადნობია. რა პროპორციითაა თითოეული ნივთიერება 210 კილოგრამიან თითბრის ზოდში, თუ სპილენძი მასში 123 კგ-ია?
15. ა) თუ $m : n = 3 : 4$ და $n : p = 3 : 5$, მაშინ რას უდრის $m : n : p$?
ბ) თუ $m : n = 2 : 5$ და $n : p = 4 : 9$, მაშინ რას უდრის $m : n : p$?



გამეორება

16. a რიცხვი b რიცხვის 0,6 ნაწილია:
ა) b რიცხვის რამდენი პროცენტია a რიცხვი;
ბ) a რიცხვის რამდენი პროცენტია b რიცხვი?
17. a, b, c და d რიცხვებისთვის $a > b > c > d$, ამასთან $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > \frac{1}{d} > \frac{1}{c}$.
 $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ნამრავლი შეადარეთ 0-ს. საკმარისია თუ არა ეს მონაცემები თითოეული რიცხვის ნიშნის დასადგენად?



რას შეძლებთ:

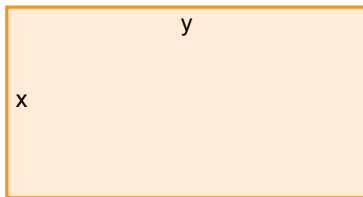
- ამოხსნათ ისეთი სიტუაციური ამოცანები, რომლებშიც გამოიყენებთ რიცხვის დაყოფას მოცემული შეფარდებით.

7. უკუპროპორციული დამოკიდებულება



მიზანი:

- შევისწავლოთ უკუპროპორციული სიდიდეები;
- უკუპროპორციულ სიდიდეთა თვისებები.



ამოცანა 1.

მართკუთხედის სიგრძე 9 სმ, ხოლო ფართობი 36 სმ²-ია.

- იპოვეთ მართკუთხედის სიგანე;
- როგორ შეიცვლება მართკუთხედის სიგრძე, თუ სიგანეს 2-ჯერ შევამცირებთ, ფართობი კი იგივე დარჩება.

ამოხსნა:

- ვიცით, მართკუთხედის ფართობი მისი სიგრძისა და სიგანის ნამრავლის ტოლია. თუ ჩავთვლით, რომ მართკუთხედის სიგანე x სმ-ია, მაშინ მისი ფართობი იქნება $9x$ სმ². მივიღებთ განტოლებას

$$9x = 36 \quad (1)$$

$$x = 4 \text{ სმ}$$

- სიგანე 2-ჯერ შემცირდება ნიშნავს, რომ (1) განტოლებაში მეორე თანამამრავლი 2-ჯერ შემცირდება, მაგრამ ნამრავლი იგივე დარჩება. ეს რომ შესრულდეს, პირველი თანამამრავლი უნდა გაიზარდოს 2-ჯერ. მაშასადამე, მართკუთხედის სიგრძე გაიზრდება 2-ჯერ.

დააკვირდით ცხრილს და შეეცადეთ უპასუხოთ:

$S=xy$	36	36	36	36	36	36	36	36	36
x	1	2	3	4	6	9	12	18	36
y	36	18	12	9	6	4	3	2	1

- როგორი დამოკიდებულებაა x და y სიდიდეების შესაბამის მნიშვნელობებს შორის?
- მართკუთხედის ერთი გვერდის გადიდებით ან შემცირებით როგორ იცვლება მეორე გვერდი, თუ ფართობი იგივე რჩება.

ორ სიდიდეს უკუპროპორციული ეწოდება, თუ ერთი სიდიდის რამდენჯერმე გადიდება (შემცირება) იწვევს მეორის იმდენჯერმე შემცირებას (გადიდებას).

x	x ₁	x ₂
y	y ₁	y ₂

თუ x და y სიდიდეები
უკუპროპორციული
სიდიდეებია, მაშინ

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2}$$

უკუპროპორციულ სიდიდეთა შესაბამისი მნიშვნელობების ნამრავლები ტოლია

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

ამოცანა 2.

6 მუშას შეუძლია არხი 15 დღეში გაიყვანოს. რამდენ დღეში შეძლებს იმავე არხის გაყვანას 10 მუშა?

ამოხსნა:

ამოცანაში სამი სიდიდეა:

I. მუშაების რაოდენობა;

II. შესასრულებელი სამუშაო, რომელიც მუდმივია – არ იცვლება;

III. დრო – დღეების რაოდენობა.

მუშების რაოდენობა და მუშაობაზე დახარჯული დრო უკუპროპორციული სიდიდეებია (რამდენჯერაც გაიზრდება მუშების რაოდენობა, იმდენჯერ სწრაფად დაამთავრებენ სამუშაოს).

ამოცანის პირობა შესაძლებელია ასეთი ცხრილის სახით გამოვსახოთ:

მუშების რაოდენობა	სამუშაოზე დახარჯული დრო
6 მუშა	15 დღე
10 მუშა	x დღე

$$\frac{6}{10} = \frac{x}{15}$$

$$6 \cdot 15 = 10x$$

$$x = 9$$

ე.ი. 10 მუშა არხს 9 დღეში გაიყვანს.

1. როგორ ფიქრობთ, როგორი დამოკიდებულება არსებობს ცხრილში მოცემულ მონაცემებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ა)

x	0,3	1,2	2,4	3,5
y	0,9	3,6	7,2	10,5

ბ)

x	2	$\frac{2}{3}$	8	$\frac{10}{3}$
y	3	9	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{5}$

2. ტურისტმა გაიარა 24 კმ. გადაიხაზეთ რვეულში ქვემოთ მოცემული ცხრილი და შეავსეთ. დააკვირდით შედეგებს და უპასუხეთ: როგორი დამოკიდებულება არსებობს სხეულის სიჩქარესა და მოძრაობაზე დახარჯულ დროს შორის, შეეცადეთ ეს დამოკიდებულება გამოსახოთ ფორმულით.

S კმ	24	24	24	24	24	24	24	24
v კმ/სთ	3		2,4		5		4,5	
t სთ		6		$6\frac{2}{3}$		3,2		7

ამოცანა 3.

2 ხელოსანს 3 თვეში შეუძლია დაამზადოს 5 მაგიდა. რამდენ თვეში დაამზადებს 5 ხელოსანი 25 მაგიდას?

ამოხსნა: გამოვსახოთ მოცემული ამოცანა ასეთი სქემით:

2 ხელოსანი – 3 თვე – 5 მაგიდა

5 ხელოსანი – x თვე – 25 მაგიდა

განვიხილოთ ასეთი სქემა:

I. 2 ხელოსანი – 3 თვე – 5 მაგიდა
5 ხელოსანი – y თვე – 5 მაგიდა

როგორც ხედავთ, მოცემული სამი სიდიდიდან ერთ-ერთი სიდიდე – შესრულებული სამუშაო – არ იცვლება, დანარჩენ ორ სიდიდეს შორის კი, ადვილად მიხვდებით, რომ არის უკუპროპორციული დამოკიდებულება. ამიტომ გვექნება

$$5y = 2 \cdot 3$$

$$y = 1,2$$

ე.ი. 5 ხელოსანი 5 მაგიდას 1,2 თვეში დაამზადებს.

შევადგინოთ მე-2 სქემა:

II. 5 ხელოსანი – 1,2 თვე – 5 მაგიდა
5 ხელოსანი – x თვე – 25 მაგიდა

ამ შემთხვევაში უკვე ხელოსანთა რაოდენობაა უცვლელი, ხოლო მუშაობაზე დახარჯულ დროსა და შესრულებულ სამუშაოს შორის კი, როგორც ვიცით, პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებაა, მივიღებთ:

$$5x = 1,2 \cdot 25$$

$$x = 6$$

მაშასადამე, ხუთი ხელოსანი 25 მაგიდას დაამზადებს 6 თვეში.



შეეცადეთ, ამოხსნათ ეს ამოცანა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ 1-ელ სქემაში უცვლელს დავტოვებთ ხელოსანთა რაოდენობას. როგორ ფიქრობთ, ამოცანის ამოხსნის რომელი გზაა უმჯობესი თქვენთვის და რატომ? პასუხი დაასაბუთეთ.



1. როგორ სიდიდეებს ეწოდება უკუპროპორციული სიდიდეები?
2. რა თვისება აქვთ უკუპროპორციულ სიდიდეებს?
3. მოიყვანეთ უკუპროპორციულ სიდიდეთა მაგალითები.



1. მოცემულია x -სა და y -ს შორის დამოკიდებულების ამსახველი რამდენიმე ცხრილი:

ა)

x	1	2	3	4
y	3	4	9	26

ბ)

x	1	1,5	2	2,5
y	3	4,5	6	7,5

გ)

x	1	3	5	8
y	2,2	5,4	9,5	10

დ)

x	2	3	4	6
y	12	8	6	4

გაანალიზეთ მონაცემების ცვლილება და დაასაბუთეთ, რომელი ცხრილი აღწერს სიდიდეებს შორის უკუპროპორციულ დამოკიდებულებას და რომელი – არა.

2. გაარკვიეთ, რომელი სიდიდეებია პირდაპირპროპორციული და რომელი – უკუპროპორციული?

ა) მართკუთხედის სიგრძე და მისი ფართობი, თუ სიგანე 3 სმ-ია;

ბ) მატარებლის სიჩქარე და 240 კმ-ის გასავლელად საჭირო დრო;

გ) მართკუთხა პარალელებიპედის სიმაღლე და მოცულობა, თუ ფუძის ფართობია 30 სმ²;

დ) ერთი და იმავე სამუშაოს შესრულებისას დახარჯული დრო და ამ სამუშაოს შესასრულებლად საჭირო ადამიანების რაოდენობა;

ე) შეძენილი ბოსტნეულის მასა და მასში გადახდილი თანხა.

როგორ ფიქრობთ, ყოველ ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულება იქნება პირდაპირპროპორციული ან უკუპროპორციული? შეგიძლიათ მოიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი?

3. 5 მუშა სახლს ღებავს 20 დღეში. რა დრო დასჭირდებოდა სახლის შეღებვას, 10 მუშას რომ ემუშავა?

4. 6 კომბაინს მოსავლის აღება 15 დღეში შეუძლია. რამდენი ასეთი კომბაინის დამატებაა საჭირო, სამუშაო 9 დღეში რომ მოესწროს?

5. 80 კმ/სთ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილი თბილისიდან სარფში 5 საათში ჩადის. რა დრო დასჭირდებოდა ამ გზის გასავლელად, 100 კმ/სთ სიჩქარით რომ ევლო?

6. გზის პირველი ნახევარი გიორგიმ ფეხით გაიარა 6 საათში, მეორე ნახევარი კი – ველოსიპედით 2 საათში. რა სიჩქარით მოძრაობდა გიორგი ველოსიპედით, თუ მისი სიჩქარე ფეხით მოძრაობისას 4 კმ/სთ იყო?



7. ტვირთის გადასატანად საჭიროა 4 ტონა ტვირთმზიდაობის 24 მანქანა. რამდენი 6 ტონა ტვირთმზიდაობის მანქანა იქნება საჭირო იმავე ტვირთის გადასატანად?
8. ავტომობილმა გარკვეულ დროში 70 კმ გაიარა. რა მანძილს გაივლის ორჯერ მეტ დროში იმავე სიჩქარით?
9. თუ ერთ თანამამრავლს გავზრდით 5-ჯერ, როგორ უნდა შევცვალოთ მეორე თანამამრავლი, რომ ნამრავლი იგივე დარჩეს?
10. 8 პრინტერი 200 გვერდს ბეჭდავს 3 წუთში. რამდენი წუთი დასჭირდება 5 ახალ პრინტერს 400 გვერდის დასაბეჭდად, თუ ახალი პრინტერები 20%-ით სწრაფად მუშაობს?
11. თიანეთში გზის 2 კმ მონაკვეთს 1 ტრაქტორი 6 საათში ასუფთავებს თოვლისგან. ძლიერი თოვლის გამო მუნიციპალიტეტმა 3 ტრაქტორი გამოგზავნა. რამდენ საათში გაწმენდენ ისინი 5-კილომეტრიან გზას?
12. 1 საწნახელი 2 ტონა ყურძენს 10 საათში წურავს. რამდენ საათში დაწურავს მიხო პაპა 5 ტონა მოსავალს, თუ მარანში ორი საწნახელი აქვს?
13. ავტომობილმა გარკვეული მანძილი 3 საათში გაიარა. რა დროში გაივლის ორჯერ მეტი სიჩქარით 3-ჯერ მეტ მანძილს?
14. 3 მენალე 4 დღეში 12 წყვილ ფეხსაცმელს კერავს. რამდენ დღეში შეკერავს 30 წყვილ ფეხსაცმელს 5 მენალე?
15. 6 მუშა ვენახში ყურძენს 6 დღეში კრეფს. რამდენი მუშის დამატება იქნება საჭირო, რთველი 4 დღეში რომ დასრულდეს?





გამეორება

16. A, B და C წერტილები MN მონაკვეთს, შესაბამისად, 1:2, 1:3 და 1:4 შეფარდებით ყოფენ M წერტილის მხრიდან. იპოვეთ:

- ა) $AB:BC$; ბ) $MA:CN$.

17. დედამიწის მასა მერკურის მასის 182%-ია, ხოლო სატურნის მასა კი – დედამიწის მასის 9401%. მერკურის მასის რამდენი პროცენტია სატურნის მასა?



რას შეძლებთ:

- ამოიცნოთ ორ სიდიდეს შორის უკუპროპორციული დამოკიდებულება;
- რეალური ცხოვრებისეული ამოცანების ამოხსნას პირდაპირპროპორციული და უკუპროპორციული სიდიდეების თვისებების გამოყენებით.



პროექტი • მოამზადეთ პროექტი: „პროპორციები ჩვენ ირგვლივ“.

მიზანი: მოიძიოთ და წარმოადგინოთ, როგორია პროპორციის შემოღების ისტორია, პროპორციის გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებაში, ბუნებაში, არქიტექტურაში, ხელოვნებაში და სხვა სფეროებში

დავალება – აირჩიეთ ერთი ან რამდენიმე თემა:

- პროპორციები ბუნებაში;
- პროპორციები ცხოველებში;
- პროპორციები არქიტექტურაში;
- პროპორციები მხატვრობაში;
- პროპორციები კულინარიაში;
- პროპორციები მედიცინაში;
- პროპორციები გეოგრაფიაში;
- პროპორციები ლიტერატურაში;
- პროპორციები ბიოლოგიაში;
- პროპორციები მუსიკაში;
- პროპორციები ქიმიაში.

სასურველია ეს თემა გადანაწილდეს რამდენიმე მოსწავლეზე.



ოქროს კვეთა

პროპორცია, როგორც ნატურალურ რიცხვთა ორი შეფარდების ტოლობა, ცნობილი იყო უძველესი დროიდან.

სიტყვა „პროპორცია“ ციცერონმა შემოიღო ძვ.წ. I საუკუნეში, როცა პლატონის ტერმინი „*αναλογία*“ ლათინურად თარგმნა, რაც სიტყვასიტყვით „ხელახალ თანაფარდობას“ ან, როგორც ჩვენ ვამბობთ, „შეფარდებას“ ნიშნავდა. მას შემდეგ, 2000 წლის განმავლობაში, მათემატიკაში პროპორცია გამოიყენება ოთხი სიდიდის – *a*, *b*, *c* და *d* თანაფარდობების თანასწორობის აღსაწერად.

პროპორცია ფართოდ გამოიყენება ადამიანის ყოველდღიური ცხოვრების სხვადასხვა სფეროში. პროპორციის ცოდნა გვეხმარება ბევრი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტაში, მაგალითად, კულინარიაში, ლანდშაფტის დიზაინში, არქიტექტურაში, მშენებლობაში, იყენებენ ასევე მედიცინაში, ბიოლოგიაში, ხელოვნებაში, მხატვრობაში და ა. შ.

ყველა იმ პროპორციას შორის, რომლებსაც იყენებდა ადამიანი, გამოირჩევა ის, რომელსაც ოქროს კვეთას უწოდებენ.

მონაკვეთის ოქროს კვეთა უძველეს დროში იყო ცნობილი. მას ჯერ კიდევ პითაგორელები იცნობდნენ. პითაგორა (VI ს. ჩვ წ.-მდე), ძველი ბერძენი ფილოსოფოსი და მათემატიკოსი, დარწმუნებული იყო, რომ ბუნებაში არსებობს ორგანული ჰარმონია, რომლის გამოხატვაც რიცხვებითა და პროპორციებით შეიძლება და რომ ეს პროპორციები შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სახლებისა და სხვა შენობების მშენებლობაში.

პითაგორამ გამოყო ძალიან სპეციფიკური პროპორციული ურთიერთობები, რომლებსაც ის ადამიანის ჰარმონიული ყოფისთვის იდეალურად მიიჩნევდა. მან ამას „**ოქროს შუალედი**“, „**ოქროს კვეთა**“ უწოდა. ასეთი პროპორციები, როდესაც რეალობაში, პრაქტიკაშია განსახიერებული, ჩვეულებრივ, თვალისთვის სასიამოვნოა და ისინი ბუნებაში ყველგან გვხვდება.



გიზის პირამიდების კომპლექსი ეგვიპტეში



ათენის პართენონი



ეიფელის კოშკი. პარიზი

აღორძინების პერიოდში კი ფრანცისკანელმა ბერმა და მათემატიკოსმა (XV ს.) ლუკა პაჩოლიმ ოქროს კვეთას უკვე ოქროს პროპორცია, ლეტაბრივი პროპორცია შეარქვა. მან თავის ტრაქტატში გადმოგვცა ოქროს კვეთის თვისებები და მისი გამოყენება არქიტექტურასა და ხელოვნებაში. შუა საუკუნეებისა და რენესანსის პერიოდში ოქროს კვეთა კვლავ იპყრობდა მხატვრების, არქიტექტორებისა და მათემატიკოსების ყურადღებას. ლეონარდო და ვინჩი და მიქელანჯელოც იყენებდნენ ამ პრინციპს თავიანთ ქმნილებებში, რათა მიეღწიათ ჰარმონიისთვის.

რა არის ოქროს კვეთის პროპორცია?

ოქროს კვეთა – ეს არის მონაკვეთის ისეთი პროპორციული დაყოფა არატოლ ნაწილებად, რომლის დროსაც მთელი მონაკვეთის სიგრძის შეფარდება დიდი ნაწილის სიგრძესთან ტოლია დიდი ნაწილის სიგრძის შეფარდებისა პატარასთან.

$$\begin{array}{c} \text{b} \qquad \qquad \text{a-b} \\ \hline \text{a} \end{array} \qquad \qquad \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$



მონა ლიზა (ჯოკონდა)
(1503-1506 წწ.).
ლეონარდო და ვინჩი
ლუერის მუზეუმი, პარიზი

ამ შეფარდებას აღნიშნავენ Φ ასოთი, რაც მიახლოებით 1,618-ის ტოლია.

პოეზიაში მსოფლიოში ერთადერთია შოთა რუსთაველი, რომელმაც ოქროს კვეთაზე ააგო ესოდენ დიდი მოცულობის პოეტური ნაწარმოები. მისი პოემის 1587 სტროფიდან 863 ოქროს კვეთაზეა აგებული.

ოქროს კვეთა ვლინდება ბეთჰოვენის ნაწარმოებების 97%-ში, მოცარტის ნაწარმოებების – 91%-ში, შოპენის ნაწარმოებების – 92%-ში. ოქროს კვეთა ვლინდება ასევე ბახისა და ვაგნერის ნაწარმოებებში.

ოქროს კვეთა გამოიყენა ქართველმა მხატვარმა სერგო ქობულაძემ, როდესაც თბილისის ოპერისა და ბალეტის თეატრისათვის 1961 წელს მოხატა სცენის საზეიმო დეკორაციული ფარდა. სერგო ქობულაძის მიერ არის აგრეთვე გამოკვლეული და დასაბუთებული, რომ მცხეთის ჯვრის დიდებული ტაძარი ოქროს კვეთის პროპორციის მიხედვით არის აგებული.

„ოქროს კვეთას“ იყენებენ ხუროთმოძღვრებასა და ხელოვნებაში. მაგალითად, ოქროს კვეთის პროპორციებია გამოყენებული: გიზის პირამიდების კომპლექსში, ათენის პართენონში, ლეონარდო და ვინჩის ფერწერულ პორტრეტში „მონა ლიზა“ და სხვ.



გვერდები შოთა რუსთაველის „ვეფხისტყაოსნის“
ბეგთაბეგისეული ნუსხიდან.
გადაწერილია 1680 წელს გიორგი XI-ის დაკვეთით.



მცხეთის ჯვრის მონასტერი (VI-VII სს.)

8. განტოლება



მიზანი:

- შევისწავლოთ, თუ რას ეწოდება განტოლება;
- განვმარტოთ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე, ტოლფასი განტოლებები.



უცნობის შემცველ ტოლობას
განტოლება ეწოდება

შესაძლებელია, რომ განტოლება ერთზე მეტ უცნობს შეიცავდეს. მაგალითად,

$$2x + 3y = 5; \quad x + 3y - z = 11$$

– შესაბამისად ორუცნობიანი და სამუცნობიანი განტოლებებია.

დედამ საბას 3 სხვადასხვა ფერის სათამაშო მანქანა და 2 ბურთი უყიდა, რომლებშიც 161 ლარი გადაიხადა. რა ღირს ერთი მანქანა, თუ ერთი ბურთი 28 ლარი ღირს?

ამოხსნა:

2 ბურთი ეღირება $2 \cdot 28 = 56$ (ლ). თუ ერთი მანქანის ღირებულებას x ლარით აღვნიშნავთ, მაშინ 3 მანქანა $3x$ ლარი ეღირება. ამოცანის პირობის თანახმად, დედამ სულ 161 ლარი გადაიხადა, მივიღებთ განტოლებას:

$$3x + 56 = 161. \quad (1)$$

როგორც ხედავთ, ჩვენ შევადგინეთ ტოლობა, რომელიც ერთ უცნობს შეიცავს. ასეთ ტოლობას **ერთუცნობიან განტოლებას** უწოდებენ. ამის შემდეგ კი ვპოულობთ x -ის იმ მნიშვნელობას, რომელიც (1) ტოლობას სწორ რიცხვით ტოლობად გადააქცევს

$$3x = 161 - 56$$

$$3x = 105$$

$$x = 35$$

უცნობის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც განტოლება გადაიქცევა სწორ რიცხვით ტოლობად, **განტოლების ამონახსნი (ფესვი)** ეწოდება.

განტოლების ფესვია 35.

ე.ი. ერთი მანქანა 35 ლარი ღირს.

რა თვისებები გამოვიყენეთ (1) განტოლების ამოხსნისას?

განტოლებას შესაძლოა ერთზე მეტი ფესვი ჰქონდეს. მაგალითად, $x^2 = 4$ განტოლებას ორი ამონახსნი აქვს: 2 და -2.

$(x - 3)(x - 1)(x - 4) = 0$ განტოლების ფესვებია: 3; 1; 4 (შეამოწმეთ თავად). ზოგიერთ განტოლებას კი ფესვი არ აქვს. მაგალითად:

$$x^2 = -2. \quad (2);$$

და

$$x + 2 = x \quad (3).$$

შეეცადეთ ახსნათ, რატომ არ აქვს (2) და (3) განტოლებებს ამონახსნი?

ამოვხსნათ განტოლება ნიშნავს, ვიპოვოთ მისი ყველა ამონახსნი, ან დავასაბუთოთ, რომ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს.

განტოლების ყველა ამონახსნისგან შედგენილ სიმრავლეს განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება.

$(x-2)(x-3)=0$ და $(2x-4)(3x-9)=0$ სხვადასხვა განტოლებებია, მაგრამ, როგორც პირველი, ასევე მეორე განტოლების ამონახსნებია $x=2$; $x=3$ (შეამოწმეთ თავად). მათი ამონახსნთა სიმრავლეა $\{2; 3\}$, ხოლო $2x + 5 = 2x$ და $3x - 7 = 3x$ განტოლებებს ამონახსნი არ აქვთ – ამონახსნთა სიმრავლეა $\emptyset$.

მათემატიკური ტერმინი „განტოლება“ ნიკო მუსხელიშვილის შემოღებულია. მან თავდაპირველად დაამკვიდრა ფორმა „გატოლება“. შემდგომში მანვე, გიორგი ახვლედიანის წინადადებით, „გან“ ზმნისწინის ძველი ფორმა აღადგინა და დღევანდელი „განტოლება“ მივიღეთ.

განტოლებებს, რომელთა ამონახსნთა სიმრავლეები ტოლია, ტოლფასი განტოლებები ეწოდებათ.

მაგალითი 1.

ტოლფასია თუ არა განტოლებები:

ა) $3x + 1 = 7$ და $8x - 12 = 4$;

ბ) $4x + 3 = 13$ და $5x = 15$;

გ) $5x - 12 = 5x + 1$ და $2x^2 = 8$.

ამოხსნა:

ა) ვიპოვოთ როგორც პირველი, ასევე მეორე განტოლების ფესვები:

$$3x + 1 = 7.$$

$$8x - 12 = 4$$

$$3x = 6.$$

$$8x = 16$$

$$x = 2.$$

$$x = 2$$

ორივე განტოლებას ერთი და იგივე ფესვი აქვს. ე.ი. განტოლებები ტოლფასია.

ბ) ამოვხსნათ ორივე განტოლება:

$$4x + 3 = 13.$$

$$5x = 15$$

$$4x = 10.$$

$$x = 3$$

$$x = 2,5$$

განტოლებებს განსხვავებული ამონახსნები აქვთ, ე.ი. ისინი არ არიან ტოლფასი განტოლებები

გ) $5x - 12 = 5x + 1$; $2x^2 = -8$;

$$x \in \emptyset$$

$$x \in \emptyset$$

მოცემული განტოლებებიდან არცერთს არ აქვს ფესვი, ორივეს ამონახსნთა სიმრავლეა $\emptyset$, ე.ი. განტოლებები ტოლფასია.



1. არის თუ არა რიცხვი 5 განტოლების ფესვი?

ა) $3(2x+4)=8x+2$;

ბ) $(x-6)(x+6)=1$.

2. აჩვენეთ, რომ $7(x+2,5)=17,5+7x$ განტოლების ამონახსნია ნებისმიერი რიცხვი.



1. როგორ განტოლებებს ეწოდება ტოლფასი განტოლებები?

2. რას ეწოდება განტოლების ამონახსნი?

3. რას ნიშნავს ამოვხსნათ განტოლება?



სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ, რომ განტოლებას აკმაყოფილებს ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობა:

ა) $x+3=3+x$;

ბ) $2(x-9)=2x-18$;

გ) $-6(-2-x)+1=6x+13$.

2. დაასაბუთეთ, რომ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია:

ა) $|x+2|=-1$;

ბ) $x^2+2=1,5$;

გ) $(x-5)^2+(2-x)^2=0$;

დ) $|x|+|8+x|=0$.

3. როგორ ფიქრობთ, ცვლადის რა მნიშვნელობისთვის იქნება:

ა) $4x-3$ გამოსახულების მნიშვნელობა 25-ის ტოლი;

ბ) $2+3y$ გამოსახულების მნიშვნელობა 2-ჯერ მეტია 8,5-ზე;

გ) $5z-2$ გამოსახულებების მნიშვნელობა 10,5-ის მოპირდაპირე რიცხვი;

დ) $2t+1$ გამოსახულების მნიშვნელობა $\frac{2}{3}$ -ის შებრუნებულზე 1-ით მეტი?

4. ამოხსენით განტოლება:

ა) $x+(-12)=-3$;

ბ) $(-1)+x=4$;

გ) $4x-1,3=-4,9$;

დ) $23-(-x)=-22$.

5. თუ ჩაფიქრებულ რიცხვს გაამრავლებთ 2-ზე, მიღებულ შედეგს შეამცირებთ 2,3-ით, მიიღებთ 5,7-ს. რას უდრის ჩაფიქრებული რიცხვი?

6. 4 რვეულში და 3 სახაზავში ანდრიამ 11,1 ლარი გადაიხადა. რა ღირს 1 რვეული, თუ 1 სახაზავის ფასი 1 ლარი და 30 თეთრია?

7. იპოვეთ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე:

ა) $2x-(-3)=-1$;

ბ) $5x+2=-13$;

გ) $3x-12=-3+3x$;

დ) $3,7x-1=-17,5$;

ე) $2x-11=10+2x$;

ვ) $10-(-x)=17-(-x)$.

8. აჩვენეთ, რომ:

ა) $2x - 7 = 3x + 2$ განტოლების ფესვია რიცხვი -9 ;

ბ) $\frac{3x}{5} - \frac{2x}{7} = 0$ განტოლების ამონახსნია 35 .

9. ამოხსენით განტოლება:

ა) $(x-2)(x-8) = 0$;

ბ) $(2x-1)(3x+7) = 0$;

გ) $(4-3x)(x^2+5) = 0$;

დ) $(x-3)(x+9)(x-7) = 0$;

ე) $(x+11)(2x-7)(7-3x) = 0$;

ვ) $x(x+1)(x+3) = 0$.

10. მარსზე გაგზავნილმა კოსმოსურმა აპარატმა მისიის პირველ ეტაპზე დაგეგმილი მონაცემების 25% შეაგროვა. ამისთვის მას 2 საათი დასჭირდა. თუ აპარატი მონაცემებს იმავე სიჩქარით გააგრძელებს შეგროვებას, რამდენ საათში შეაგროვებს დაგეგმილი მონაცემების $\frac{4}{5}$ -ს?

11. ლუკა ამბობს, რომ მან არ იცის ზოგიერთი განტოლების ამოხსნა, თუმცა დანამდვილებით შეუძლია თქვას, რომ რიცხვი 2 წარმოადგენს $x^3 - 2x^2 + 3x = 6$ განტოლების ერთ-ერთ ფესვს. შეუძლია თუ არა ლუკას თავისი სიმართლის დასაბუთება? შეეცადეთ, მოძებნოთ $x^3 - x^2 + 2x = 2$ განტოლების რომელიმე ამონახსნი.



კვლევითი დავალება

შეადგინეთ სამი განტოლება:

- ერთი, რომელიც ჭეშმარიტია ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის;
- ერთი, რომელიც ჭეშმარიტია ცვლადის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობისთვის;
- ერთი, რომელიც ყოველთვის მცდარია.

იმსჯელეთ, რამდენი ამონახსნი შეიძლება ჰქონდეს განტოლებას?



გამეორება

12. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი მათგანი მისი ორი მოსაზღვრე კუთხის ჯამის 25% -ია. იპოვეთ ამ კუთხის გრადუსული ზომა.

13. სამი ტრაქტორი 2 საათში ხნავს ნაკვეთის 25% -ს. რა დროში მოხნავს მთელ ნაკვეთს 4 ტრაქტორი?



რას შეძლებთ:

- შეამოწმოთ, არის თუ არა ესა თუ ის რიცხვი მოცემული განტოლების ფესვი;
- ამოიცნოთ ტოლფასი განტოლებები.

9. განტოლების ამოხსნა



მიზანი:

- ვისწავლოთ განტოლების ამოხსნა, მისი თვისებები.

საბამ და ელენემ ტყეში 70 სოკო მოაგროვეს. რამდენი სოკო მოაგროვა თითოეულმა, თუ საბამ 6-ით მეტი სოკო მოაგროვა, ვიდრე ელენემ?

განვიხილოთ ასეთი ამოცანა: ერთ ჯგუფში 4-ჯერ ნაკლები ხელოსანი იყო, ვიდრე მეორეში. მას შემდეგ, რაც მეორე ჯგუფიდან 6 ხელოსანი წავიდა, ხოლო პირველს 12 ხელოსანი დაემატა, ჯგუფებში ხელოსანთა რაოდენობა გათანაბრდა. რამდენი ხელოსანი იყო თავდაპირველად თითოეულ ჯგუფში?



იცოდით, რომ

XVI საუკუნემდე განტოლებების ამოხსნის ზოგადი წესები თითქმის საიდუმლოდ ინახებოდა. მათემატიკოსები ერთმანეთს ამოცანების ამოხსნაში ეჯიბრებოდნენ და საკუთარ მეთოდებს ხშირად არ ამხელდნენ.

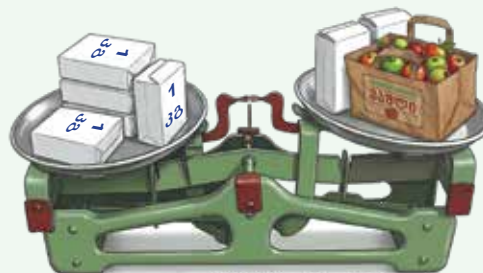
ამოხსნა:

ვთქვათ, თავდაპირველად პირველ ჯგუფში იყო x ხელოსანი, მაშინ მეორეში იქნებოდა 4-ჯერ მეტი, ე.ი. $4x$ ხელოსანი. ცვლილების შემდეგ პირველში გახდებოდა $x + 12$, ხოლო მეორეში – $(4x - 6)$ ხელოსანი. ამოცანის პირობის თანახმად, ჯგუფებში ხელოსანთა რაოდენობა გათანაბრდა. მივიღებთ განტოლებას:

$$x + 12 = 4x - 6 \quad (1)$$

მაგრამ როგორ ამოვხსნათ ეს განტოლება? მას ჩვენთვის უკვე ცნობილი მეთოდებით ვერ ამოვხსნით.

- სურათის მიხედვით აღადგინეთ ამოცანა და გაიზრეთ, რამდენი პაკეტი უნდა ავიღოთ სასწორის ორივე თევშიდან, რომ სასწორის წონასწორობა შენარჩუნდეს? იპოვეთ ვაშლებიანი პაკეტის მასა.



- როგორ ფიქრობთ, დაირღვევა თუ არა სწორი ტოლობა, თუ ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ ან გამოვაკლებთ ერთსა და იმავე რიცხვს?

განტოლების ამოხსნის პროცესში საჭიროა მოცემული განტოლება შევცვალოთ მასზე მარტივი, მაგრამ მისი ტოლფასი განტოლებით, რისთვისაც ვსარგებლობთ შემდეგი თვისებებით:

1. თუ განტოლების ორივე მხარეს დავუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.
2. თუ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ნულის არატოლ ერთსა და იმავე რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.

უკეთ გავიაზროთ მე-2 თვისება.

განვიხილოთ ასეთი განტოლება:

$$x(x-1)=5(x-1) \quad (2)$$

თუ განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ $(x-1)$ -ზე, მივიღებთ, რომ $x=5$, მაგრამ ადვილად შესამოწმებელია, რომ (2) განტოლებას ორი ამონახსნი აქვს $x=5$; 1.

როგორც ვხედავთ, განტოლების $(x-1)$ -ზე გაყოფით ვერ მივიღეთ მოცემულის ტოლფასი განტოლება, რატომ? ჩვენ მოცემული განტოლება გავყავით ისეთ გამოსახულებაზე $-(x-1)$ -ზე, რომელიც, როცა $x=1$, ნულის ტოლი ხდება, რის გამოც ფესვი $x=1$ დაიკარგა.

ამოვხსნათ (1) განტოლება.

$$x+12=4x-6$$

ტოლობის ორივე ნაწილს დავუმატოთ 6:
 $x+12+6=4x-6+6$ (1-ელი თვისება)

$$x+12+6=4x$$

ვხედავთ, რომ შესაკრები (-6) განტოლების მარცხენა ნაწილიდან თითქოს მარჯვენაში გადავიდა მოპირდაპირე ნიშნით.

$$x+18=4x$$

ტოლობის ორივე ნაწილს გამოვაკლოთ x : $x+18-x=4x-x$

$$18=4x-x$$

შესაკრები x განტოლების მარცხენა ნაწილიდან თითქოს მარჯვენაში გადავიდა მოპირდაპირე ნიშნით.

$$3x=18$$

განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ 3-ზე (მე-2 თვისება)

$$x=6$$

ამრიგად, პირველ ჯგუფში იყო 6 ხელოსანი, მეორეში კი $6 \cdot 4 = 24$ ხელოსანი.

განხილული მაგალითიდან შესაძლებელია დავასკვნათ:

თუ განტოლების ერთი ნაწილიდან მეორეში გადავიტანთ შესაკრებს მოპირდაპირე ნიშნით, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.

მაგალითი 1.

ამოვხსნათ განტოლება:

ა) $4(x-3) = 2(x+4) + 2x$;

ბ) $3(2x+7) - 14 = 6(x+3) - 11$;

გ) $5(x-7) = 3(x-4) - 13$.

ამოხსნა:

ა) $4(x-3) = 2(x+4) + 2x$

$$4x - 12 = 2x + 8 + 2x$$

$$4x - 2x - 2x = 8 + 12$$

$$0 \cdot x = 20$$

განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, რადგან არ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომელიც მიღებულ $0 \cdot x = 20$ ტოლობას სწორ ტოლობად გადააქცევს. ე.ი. $x \in \emptyset$.

ბ) $3(2x+7) - 14 = 6(x+3) - 11$

$$6x + 21 - 14 = 6x + 18 - 11$$

$$6x - 6x = 18 - 11 - 21 + 14$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$0 = 0$$

მივიღეთ ჭეშმარიტი ტოლობა, ე.ი. განტოლების ამონახსნია ნებისმიერი რიცხვი.

გ) $5(x-7) = 3(x-4) - 13$

$$5x - 35 = 3x - 12 - 13$$

$$5x - 3x = 35 - 12 - 13$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

ამრიგად, განტოლება რომ ამოვხსნათ, საჭიროა:

1. გავამარტივოთ მოცემული განტოლება:

- გავხსნათ ფრჩხილები.
- უცნობის შემცველი წევრები გადავიტანოთ განტოლების ერთ ნაწილში, დანარჩენი შესაკრებები კი – მეორე ნაწილში.
- შევაერთოთ მსგავსი წევრები.

2. ამოვხსნათ მიღებული განტოლება.



- ჩამოაყალიბეთ განტოლების ძირითადი თვისებები.
- რამდენი ამონახსნი აქვს განტოლებას $|x| - 5 = |x| + 2$?
- მოიფიქრეთ განტოლება:
 - რომელიც იქნება $x - 3 = 6 - 2x$ განტოლების ტოლფასი;
 - რომლის ამონახსნიც იქნება ნებისმიერი რიცხვი;
 - რომელსაც არ ექნება ამონახსნი.
- მოიფიქრეთ, როგორ ვიპოვოთ, რა რიცხვია $x - 5 = a - x$ განტოლებაში აღნიშნული a ასოთი, თუ ცნობილია, რომ განტოლების ამონახსნია 2, ხოლო x უცნობია.



სავარჯიშოები

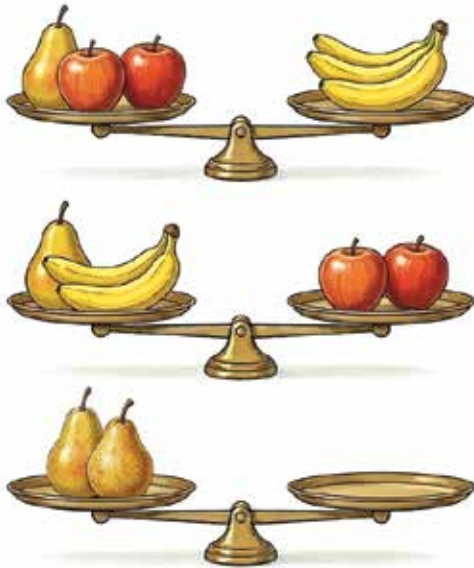
- ამოხსენით განტოლება:

ა) $2x - 3 = 19$;	ბ) $2 - y = -11$;
გ) $-4m - 7 = 5$;	დ) $-4,2 - 3x = 1,8$;
ე) $4x - 13 = 21 - 10x$;	ვ) $x - 2 = 2 - x$;
ზ) $y - 44 = 13 + y$;	თ) $9m - 23 = -11m$;
ი) $3 + y = y + 3$;	კ) $73 = -2m - 27$.
- იპოვეთ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე:

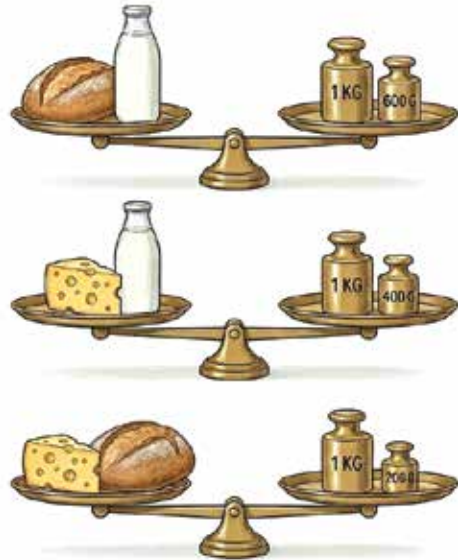
ა) $4(a - 3) + 3(2 - a) = -2$;	ბ) $5 - (3 - 2m) = 9m - 3$;
გ) $2,5(4x - 1) + 0,5 = 3x - 12$;	დ) $1,2(y + 2) - 2,8(-y + 5) = 4,8$;
ე) $0,9(b - 4) - 2(1,2b + 3) = 5,4$;	ვ) $3(2k - 5) - 5(1,2k - 3) = 0$.
- რას უნდა უდრიდეს m რიცხვი, რომ:
 - x ცვლადის მიმართ $2x - 5 = m$ განტოლების ამონახსნი იყოს 2?
 - x ცვლადის მიმართ $3x - 2m = 5$ განტოლების ამონახსნი იყოს -5?
 - x ცვლადის მიმართ $5(x - 2) - 5 = mx$ განტოლებას ამონახსნი არ ჰქონდეს?
 - x ცვლადის მიმართ $2x - 7m = 2x + m + 1$ განტოლებას უამრავი ამონახსნი ჰქონდეს?
- სამი მომდევნო ლუწი რიცხვის ჯამია 90. იპოვე ამ რიცხვებს შორის უმცირესი.
- დედამ 7,5 კილოგრამი კენკრა 35 ლარად შეიძინა. 1 კგ მოცვი ღირდა 5 ლარი, 1 კგ ჟოლო - 4,5 ლარი. რამდენი კილოგრამი მოცვი იყიდა დედამ? რა თანხა გადაიხდა ჟოლოში?
- იპოვეთ k -ს მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $\frac{x-2}{5} = \frac{4k-3x}{3}$ და $\frac{3x-1}{5} = \frac{1+2x}{3}$ ტოლფასი განტოლებებია.

7. დააკვირდით სურათს და უპასუხეთ:

ა) რამდენი ბანანის დადებით განონასწორდება მესამე სასწორი?



ბ) იპოვეთ ერთი პურის, ერთი ბოთლი რძის და ერთი ყველის მასა.



8. ამოხსენით განტოლება m ცვლადის მიმართ:

ა) $3m + 2n = 7$;

ბ) $2m - 3 = 2n - 4$.

$$2m + 5n = 1$$

$$2m = 1 - 5n$$

$$m = \frac{1 - 5n}{2}$$

9. მოცემულია ორი განტოლება:

I. $|x| = x$;

II. $|x| = -x$.

- ტოლფასია თუ არა ეს განტოლებები? (პასუხი დაასაბუთეთ);
- დაასახელეთ პირველი განტოლების რამდენიმე ამონახსნი;
- დაასახელეთ მეორე განტოლების რამდენიმე ამონახსნი;
- აქვთ თუ არა საერთო ამონახსნი განტოლებებს?
- შეგიძლიათ დაასახელოთ რიცხვი, რომელიც არ აკმაყოფილებს არცერთ განტოლებას?

10. ამოხსენით განტოლება:

ა) $|x - 5| = 3$;

ბ) $|2x + 3| - 7 = 12$;

გ) $(|x| - 7) - 3 = 2$;

დ) $(|x - 1| + 3) = 8$.

11. იპოვეთ p -ს ყველა ნატურალური მნიშვნელობა, რომლებისთვისაც x -ის მიმართ:

ა) $px = 5$ განტოლების ამონახსნი მთელი რიცხვია;

ბ) $(p + 2)x = 10$ განტოლების ამონახსნი ნატურალური რიცხვია.



გამეორება

12. სამკუთხედის ერთი გვერდი მეორის 75%-ია და მესამის 50%. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ საშუალო გვერდის სიგრძე 12 სმ-ია.
13. მაშინაც კი, როცა აქლემს სწყურია, მისი მასის 60% წყალია. წყლის დაღუპვის შემდეგ აქლემის წონაა 800 კგ და წყალი მისი მასის 80%-ს შეადგენს. რამდენს იწონის აქლემი, როდესაც სწყურია?



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის

1. სამმა მეგობარმა 90 სოკო შეაგროვა, გიორგიმ ოთხჯერ მეტი დაკრიფა, ვიდრე ანამ და 18-ით ნაკლები, ვიდრე ოთარმა. რამდენი სოკო იპოვა თითოეულმა?
2. ელენეს 3-ჯერ მეტი ფანქარი აქვს ვიდრე, ნანას, მას შემდეგ, რაც ელენემ 2 ფანქარი დაკარგა და 5 ფანქარი ნანას აჩუქა, გოგონებს ერთნაირი რაოდენობის ფანქრები გაუხდათ. რამდენი ფანქარი ჰქონდა ნანას თავდაპირველად?



რას შეძლებთ:

- განტოლების თვისებების გამოყენებით შეძლებ ისეთი განტოლების ამოხსნას, როცა განტოლების ორივე მხარეში არის უცნობი სიდიდე.
- დაადგინოთ რამდენი ამონახსენი აქვს ერთუცნობიან განტოლებას: ერთი, უამრავი, თუ არცერთი.

10. ამოცანების ამოხსნა განტოლების მეშვეობით



მიზანი:

- განტოლების საშუალებით ამოცანების ამოხსნა.

ალგებრის ენა განტოლებებია. „იმისათვის, რომ გადავჭრათ საკითხი, რომელიც რიცხვებს ან სიდიდეებს შორის თანაფარდობებს ეხება, საჭიროა ამოცანა მშობლიური ენიდან ალგებრის ენაზე გადავიტანოთ“, – წერდა დიდი ინგლისელი მეცნიერი ისააკ ნიუტონი თავის ალგებრის სახელმძღვანელოში „არიითეტიკა“ და, თუ როგორ მოვახერხოთ ეს, ამის მაგალითებიც გვიჩვენა. განვიხილოთ ერთ-ერთი მათგანი:

მშობლიურ ენაზე	ალგებრის ენაზე
ვაჭარს ჰქონდა თანხის რაღაც რაოდენობა	x
1-ელ წელს მან დახარჯა 100 ფუნტი	$x - 100$
და დარჩენილ თანხას დაუმატა მისი მესამედი	$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
მეორე წელს მან ისევ 100 ფუნტი დახარჯა	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
და დარჩენილ თანხა გაზარდა მისი მესამედით	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4x - 700}{3} = \frac{16x - 2800}{9}$
მესამე წელს ისევ 100 ფუნტი დახარჯა	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
ამის შემდეგ მან ისევ მესამედით გაზარდა დარჩენილ თანხა	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{16x - 3700}{9} = \frac{64x - 14800}{27}$
და ვაჭრის კაპიტალი თავდაპირველზე 2-ჯერ მეტი გახდა	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$

ამის შემდეგ კი შეგვიძლია ამოვხსნათ განტოლება:

$$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$$

$$x = 1480$$

ე.ი. ვაჭარს თავდაპირველად 1480 ფუნტი ჰქონდა.

რა თქმა უნდა, განტოლების ამოხსნა რთული არ არის, მაგრამ ამოცანის პირობის „მშობლიური ენიდან ალგებრულზე გადათარგმნის“ ხელოვნებას დაუფლება სჭირდება.

განვიხილოთ კიდევ ერთი ძველი ამოცანა. ძველი დროის უდიდესი მათემატიკოსის, დიოფანტეს, ბიოგრაფიის შესახებ ინფორმაციამ ჩვენამდე თითქმის არ მოაღწია. ცნობილია მხოლოდ წარწერა მისი საფლავის ქვაზე, რომელსაც ამოცანის ფორმა აქვს. აი ისიც:

მშობლიურ ენაზე	ალგებრის ენაზე
მგზავრო, აქ განისვენებს დიოფანტეს გვამი და ჰოი, საოცრებავ, რიცხვებს შეუძლია გვიკარნახონ, რა გრძელი იყო მისი ცხოვრების გზა	x
მისი მეექვსედი მშვენიერი ბავშვობა იყო	$\frac{x}{6}$
სიცოცხლის მეთორმეტედმა ნაწილმაც გაიარა და სახე ღინღლით დაეფარა	$\frac{x}{12}$
კიდევ მეშვიდედი და ცხოვრების თანამგზავრი პოვა	$\frac{x}{7}$
5 წლის შემდეგ გაბედნიერდა პირმშო ვაჟის დაბადებით	5
რომელმაც, ვაგლახ, მამის ნახევარი იცოცხლა მხოლოდ	$\frac{x}{2}$
ოთხი წელიწადი იგლოვა ბრძენმა ძე საყვარელი და აქ განგებამ მასაც მოუსწრაფა მწარე სიცოცხლე	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

თქვი, რა ასაკში მიიცვალა დიოფანტე.

მიღებული განტოლების ამოხსნით ვიგებთ, რომ დიოფანტეს უცოცხლია 84 წელი, დაქორწინებულა 33 წლის ასაკში და შვილი შესძენია 38 წლისას. 80 წლის ასაკში კი შვილი დაუკარგავს.

როგორ ფიქრობთ, არის თუ არა საჭირო ამოცანის ამოხსნისას შევექმნათ რეალური სიტუაციის მათემატიკური მოდელი? თუ კი, მაშინ რაში გვეხმარება ასეთი მოდელი?

ამ უძველესი ამოცანების განხილვამაც კი დაგვანახა, რომ ამოცანის ამოხსნა დიდადაა დამოკიდებული უცნობის გონივრულ შერჩევაზე. უცნობი ისე უნდა შემოვიტანოთ, რომ მისი საშუალებით ამოცანის პირობა რაც შეიძლება მარტივად ჩავწეროთ. ასევე, საჭიროა, ამოცანის პირობაში მოცემული სიდიდეები გამოვსახოთ ერთეულთა ერთსა და იმავე

სისტემაში. მაგალითად, თუ მოძრაობაზე დახარჯული დრო გამოსახულია საათებით, ხოლო სიჩქარე მ/წთ-ით, საჭიროა დროის ერთეულად შეირჩეს წუთები, ან პირიქით, სიჩქარე გამოისახოს კმ/სთ-ით (რომელია უმჯობესი, ამას ამოცანის პირობით დაადგენთ).

ამოცანა 1.

დავალება რომ დადგენილ ვადაში შეესრულებინა, ხელოსანს ყოველდღიურად 24 დეტალი უნდა დაემზადებინა. სინამდვილეში ხელოსანი ყოველდღიურად 32 დეტალს ამზადებდა, ამიტომ დავალება ვადამდე 4 დღით ადრე შეასრულა. რამდენი დეტალი დაამზადა ხელოსანმა?

ამოხსნა:

1.	შევარჩიოთ უცნობი სიდიდე.	ვთქვათ, ხელოსანს დავალება უნდა შეესრულებინა x დღეში.
2.	შევცადოთ ეს შერჩეული უცნობი სიდიდე დავუკავშიროთ ამოცანის პირობაში მოცემულ სხვა სიდიდეებს და შევადგინოთ განტოლება.	მაშინ მას უნდა დაემზადებინა $24x$ დეტალი. რადგან ყოველდღიურად 32 დეტალს ამზადებდა, $(x-4)$ დღეში დაამზადებდა $32(x-4)$ დეტალს. ა.პ.თ. მან დავალება შეასრულა, მივიღებთ განტოლებას $24x = 32(x - 4)$
3.	განტოლების ამოხსნა	$24x = 32(x - 4)$ $24x = 32x - 128$ $8x = 128$ $x = 16$
4.	პასუხის გაცემა	რადგან დავალება 16 დღეში უნდა შეესრულებინა, დასამზადებელი დეტალების რაოდენობაა $16 \cdot 24 = 384 \text{ (დეტალი)}$

განხილული მსჯელობა მოკლედ, სქემის სახით, შესაძლებელია ასეც ჩავენეროთ:

შემთხვევა	სამუშაოს შესრულების დრო (დღ.)	მუშაობის სიჩქარე	შესასრულებელი სამუშაოს რაოდენობა	დამოკიდებულება
გეგმით	x დღე	24 დეტ/დღ	$24x$ დეტ.	$24x = 32(x - 4)$
რეალურად	$(x-4)$ დღე	32 დეტ/დღ	$32(x - 4)$ დეტ.	

რა თქმა უნდა, x -ით ასევე შესაძლებელი იყო აღგვენიშნა შესასრულებელი სამუშაოს რაოდენობაც.

თქვენ როგორ ფიქრობთ, რომელი აღნიშვნა იქნებოდა უკეთესი და მოხერხებული? პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოცანა 2.

კატერმა მდინარის დინების მიმართულებით 4 სთ იმოძრავა. სანინალმდეგო მიმართულებით კი – 3 სთ. თან კატერმა მდინარის მიმართულებით 48 კმ-ით მეტი მანძილი გაიარა, ვიდრე სანინალმდეგო მიმართულებით. რისი ტოლია კატერის სიჩქარე მდგარ წყალში, თუ ცნობილია, რომ მდინარის დინების სიჩქარე 2,5 კმ/სთ-ია.

ამოხსნა:

1) ვთქვათ, კატერის სიჩქარე მდგარ წყალში არის x კმ/სთ.

მდინარის მიმართულებით იგი იმოძრაებს $(x + 2,5)$ კმ/სთ სიჩქარით და გაივლის $4(x + 2,5)$ კმ-ს. მდინარის სანინალმდეგო მიმართულებით კი იმოძრაებს $(x - 2,5)$ კმ/სთ სიჩქარით და გაივლის $3(x - 2,5)$ კმ-ს.

ა.პ.თ. კატერმა მდინარის მიმართულებით 48 კმ-ით მეტი მანძილი გაიარა. მივიღებთ განტოლებას:

$$4(x + 2,5) = 3(x - 2,5) + 48.$$

განტოლების ამოხსნის შედეგად მივიღებთ $x = 30,5$ კმ/სთ.

სქემა:

შემთხვევა	სიჩქარე	დრო	გავლილი მანძილი	დამოკიდებულება
მდ.-ის მიმართ.-ით ↑↑	$(x + 2,5)$ კმ/სთ	4 სთ	$(4x + 2,5)$ კმ	$4(x + 2,5) = 3(x - 2,5) + 48$
მდ. სან. მიმართ.-ით ↑↓	$(x - 2,5)$ კმ/სთ	3 სთ	$3(x - 2,5)$ კმ	

შეადარეთ ერთმანეთს ამოცანის ამოხსნის გაფორმების განხილული ორი ხერხი და გამოთქვით მოსაზრება, რომელი უფრო მოგწონთ და რატომ?

ამოცანა 3.

ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი 14-ის ტოლია. თუ ამ რიცხვს გავამრავლებთ 8-ზე და მიღებულ ნამრავლს გამოვაკლებთ ისეთ ორნიშნა რიცხვს, რომელიც ჩანერილია მოცემული ორნიშნა რიცხვის ციფრებით, ოღონდ შებრუნებული მიმდევრობით, მივიღებთ 458-ს. იპოვეთ ეს რიცხვი.

ამოხსნა:

ჩამოვწერთ ყველა ის ორნიშნა რიცხვი, რომელთა ციფრთა ჯამია 14.
ესენია: 95; 86; 77; 68; 59.

თითოეული ამ რიცხვისთვის, ამოცანის პირობის მიხედვით, შევადგინოთ რიცხვითი გამოსახულება:

ა) $95 \cdot 8 - 59$; ბ) $86 \cdot 8 - 68$; გ) $77 \cdot 8 - 77$;

დ) $68 \cdot 8 - 86$; ე) $59 \cdot 8 - 95$.

ვიპოვოთ თითოეული გამოსახულების მნიშვნელობის ბოლო ციფრი.

ა) $95 \cdot 8 - 59 = ..0 - 59 = ...1$;

ბ) $86 \cdot 8 - 68 = ...8 - 68 = ..0$;

გ) $77 \cdot 8 - 77 = ...6 - 77 = ..9$;

დ) $68 \cdot 8 - 86 = ..4 - 86 = ..8$;

ე) $59 \cdot 8 - 95 = ..2 - 95 = ..7$.

ა.პ.თ. გამოსახულების მნიშვნელობა უნდა ბოლოვდებოდეს „8“-ით. როგორც ხედავთ, ა, ბ, გ, და ე შემთხვევები არ გამოგვაადგება. განვიხილოთ დ შემთხვევა:

$$68 \cdot 8 - 86 = 544 - 86 = 458. \text{ ე.ი. საძიებელი რიცხვია } 68.$$



1. შეეცადეთ უპასუხოთ, რა რიცხვი უნდა ეწეროს გამოტოვებულ ადგილას?

ა) 4კმ 80მ = ... მ; 2007მ = ... კმ ... მ; 707დმ = ...მ ...სმ;

ბ) 5სთ 20წთ = ... წთ; 500წთ = ...სთ ... წთ; 220წმ = ...წთ ...წმ;

გ) 2კგ 300გ = ...გ; 2320გ = ...კგ ...გ; 15 ც = ...ტ ...ც.

2. ნავის სიჩქარე მდგარ წყალში არის 8 კმ/სთ, მდინარის სიჩქარე კი 3,5 კმ/სთ-ია. რა სიჩქარით იმოძრავენ ნავი მდინარის მიმართულებით? მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით? შეეცადეთ პასუხი დაასაბუთოთ.



სავარჯიშოები

1. ამოცანის მიხედვით შეადგინეთ განტოლება და ამოხსენით:

ა) იპოვეთ რიცხვი, რომელიც 30-ით ნაკლებია თავის გასამკეცებულზე;

ბ) იპოვეთ ნატურალური რიცხვი, რომელიც მისი ორი მომდევნო რიცხვის ჯამის მესამედია.

2. და ძმაზე 4-ჯერ უფროსია, 4 წლის შემდეგ კი 2-ჯერ უფროსი იქნება.

რამდენი წლისაა და? რამდენი წლის შემდეგ იქნება მათი ასაკთა ჯამი 24 წელი?

3. საზამთრო ნესვზე 2-ჯერ მძიმეა, იპოვეთ თითოეულის მასა, თუ საზამთროს 20% 3,6 კილოგრამით მსუბუქია ნესვზე.

4. 8-შვილიან ოჯახში გოგონების რაოდენობა ბიჭების რაოდენობაზე 4-ით მეტია. რამდენჯერ მეტი გოგონა იქნება ბიჭებთან შედარებით, თუ ოჯახს კიდევ ერთი ბიჭი შეეძინება?
5. მართკუთხედის სიგრძე 3-ჯერ დიდია სიგანეზე. თუ სიგრძეს გავზრდით 4 სმ-ით, ხოლო სიგანეს შევამცირებთ 2-ჯერ, მაშინ მისი პერიმეტრი 4 სმ-ით გაიზრდება. იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე.
6. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეების სიდიდე, თუ ერთის მეოთხედი მეორის 20%-ის ტოლია.
7. სპორტული დარბაზის აბონემენტი თვეში 120 ლარი ღირს, მაგრამ 20%-იან ფასდაკლებით ისარგებლებ, თუ წინასწარ გადაიხდი ნახევარი წლის საფასურს. 6 თვეში რამდენ ლარს დაზოგავ, თუ შეთავაზებას გამოიყენებ? ღირს თუ არა აქციით სარგებლობა, თუ მხოლოდ 5 თვე აპირებ სიარულს?

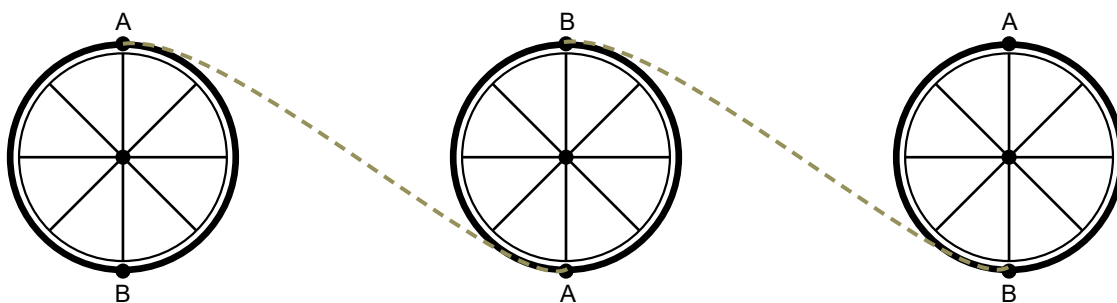


8. თუ მართკუთხედის სიგრძეს შევამცირებთ 80%-ით, ხოლო სიგანეს $-\frac{2}{3}$ ნაწილით, მაშინ მიიღებთ კვადრატს, რომლის პერიმეტრია 72 მ. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდების სიგრძეების შეფარდება.
9. სილნალსა და ქარელს შორის მანძილს ავტობუსი 3 საათსა და 20 წუთში გადის. თუ სიჩქარეს 21 კმ/სთ-ით გაზრდის, მაშინ იმავე მანძილის გასავლელად 1 სთ და 10 წუთით ნაკლები დრო დასჭირდება. იპოვეთ ქალაქებს შორის მანძილი.
10. ერთ საწყობში 200 ცენტნერი ხორბალია, მეორეში – 160 ცენტნერი. პირველი საწყობიდან ყოველდღიურად გააქვთ 8 ც ხორბალი, მეორიდან კი – 10 ც. რამდენი დღის შემდეგ იქნება პირველ საწყობში 2-ჯერ მეტი ხორბალი? რამდენი ცენტნერი ხორბალი იქნება გატანილი ორივე საწყობიდან ერთად?
11. ავტომობილი 60 კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობს. რა სიჩქარით უნდა იმოძრაოს, რომ ყოველი კილომეტრი $\frac{1}{3}$ წთ-ით უფრო სწრაფად გაიაროს?

12. კატერი მდინარის დინების მიმართულებით 4-ჯერ მეტი სიჩქარით მოძრაობს, ვიდრე საწინააღმდეგო მიმართულებით. რამდენჯერ მეტია კატერის საკუთარი სიჩქარე მდინარის დინების სიჩქარეზე?



13. ეტლის უკანა ბორბლის წრეწირის სიგრძე 32 დმ-ია, პატარა ბორბლისა კი – 24 დმ. რა მანძილი გაიარა ეტლმა, თუ პატარა ბორბალმა 15 ბრუნით მეტი გააკეთა, ვიდრე დიდმა?



14. დაჩიმ პირველ დღეს წიგნის 30% წაიკითხა, მეორე დღეს დარჩენილის $\frac{3}{7}$ წაწილი. მესამე დღეს კი – დარჩენილი 80 გვერდი. რამდენგვერდიანია წიგნი? რამდენი ციფრია საჭირო მისი გვერდების დასანომრად?



15. 2024 წლის პარიზის პარალიმპიადაზე საქართველოს ნაკრებმა 9 მედალი მოიპოვა. ვერცხლის მედლები ოქროზე 4-ჯერ მეტია, ხოლო ბრინჯაოს მედლები – ოქროზე 3-ით მეტი. რამდენი ოქროს, ვერცხლის, ბრინჯაოს მოიპოვა საქართველომ პარიზში?

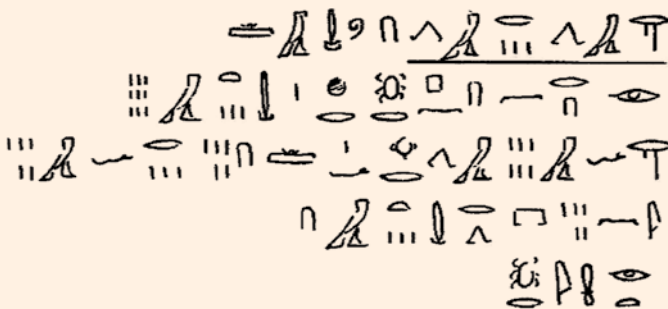
16. შეძლებს თუ არა თამარი 55 წიგნის სამ თაროზე ისე განთავსებას, რომ პირველ თაროზე 4-ით მეტი წიგნი იყოს, ვიდრე მეორეზე და 7-ით ნაკლები, ვიდრე მესამეზე?
17. ბიბლიოთეკაში მოაწვევს ადაპტირებული სამკითხველო დარბაზი. მაგიდების რაოდენობა 2-ჯერ მეტია სპეციალური სავარძლების რაოდენობაზე. თუ დაამატებენ 4 სავარძელს და 2 მაგიდას, მაშინ სავარძლები მაგიდების $\frac{2}{3}$ ნაწილი გახდება. რამდენი სავარძელი და რამდენი მაგიდაა დარბაზში?
18. ორი რიცხვის ჯამის 25 % მათი სხვაობის 125%-ის ტოლია. მცირე რიცხვის რამდენი პროცენტია დიდი რიცხვი?
19. რინდის პაპირუსში მოცემულია ამოცანები, რომლებიც განტოლების შედგენით იხსნება.
 დაწერეთ განტოლება საძიებელი რიცხვისათვის და ამოხსენით.
 ა) რინდის პაპირუსის 24-ე ამოცანა: „რაოდენობა და მისი მეშვიდედი ერთად არის 19“.
 ბ) რინდის პაპირუსის 28-ე ამოცანა: რაოდენობას და მის ორ მესამედს მოაკლდა მიღებულის ერთი მესამედი. დარჩენილია ათი“.

არითმეტიკული ამოცანებისადმი ალგებრული მიდგომის ნიმუშები გვხვდება ჯერ კიდევ ძველ ეგვიპტურ პაპირუსში, რომელიც ძვ. წ. 2000-1700 წლებშია დაწერილი ვინმე აჰმესის მიერ. ეს პაპირუსი ცნობილია „რინდის პაპირუსის“ სახელით. საილუსტრაციოდ გავეცნოთ ერთ, რიგით 26-ე, ამოცანას და მის ამოხსნას. თავად დარწმუნდებით, რა ლამაზ მეთოდს იყენებს აჰმესი.

ამოცანა: „რაოდენობა და მისი მეოთხედი ერთად არის 15. იპოვეთ რაოდენობა“.
 ამოხსნა:

„დაიწყო დათვლა 4-დან, — გვირჩევს აჰმესი, — მათგან უნდა აიღო მეოთხედი, სახელდობრ 1. ერთად იქნება ხუთი“.

ამის შემდეგ აჰმესი 15-ს ყოფს 5-ზე და განაყოფს, ესე იგი, 3-ს ამრავლებს 4-ზე. რადგან $4 \cdot 3 = 12$, ამიტომ საძიებელი რაოდენობაა 12.

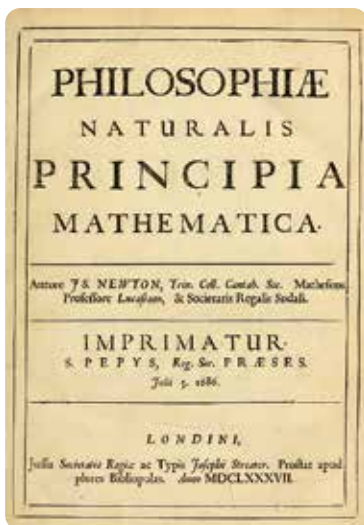


რინდის პაპირუსი
 ამოცანები იკითხება
 მარჯვნიდან მარცხნივ



რას შეძლებთ:

- ამოცანის პირობის ალგებრის ენაზე გადატანას, შედეგად ამოცანის პირობის მიხედვით განტოლების შედგენას და განტოლების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნას.



ისააკ ნიუტონის ფუნდამენტური ნაშრომის, „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისების“, პირველი გამოცემის ტიტულოვანი გვერდი (ლონდონი, 1687 წელი).

სერ ისააკ ნიუტონი (1643-1727) – უდიდესი ინგლისელი მეცნიერი, ფილოსოფოსი, ფიზიკოსი, მექანიკოსი, ასტრონომი და მათემატიკოსი.

მან აღმოაჩინა მსოფლიო მიზიდულობის კანონი; ლაიბნიცისაგან დამოუკიდებლად დაამუშავა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, გამოიგონა სარკისებური ტელესკოპი; ნიუტონის შრომებმა ბუნებისმეტყველების სხვადასხვა დარგში დიდად გაუსწრო თავის დროს.

1672 წლიდან ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი იყო, ხოლო 1703 წელს არჩეულ იქნა ამ საზოგადოების პრეზიდენტად. იყო ინგლისის პარლამენტის წევრიც.

1687 წელს ნიუტონმა გამოაქვეყნა ბრწყინვალე ნაშრომი – „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები“ (მოკლედ „საწყისები“), რომელიც ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი ნიგნია კაცობრიობის ცოდნის მსოფლიო საგანძურში. ზოგიერთი მეცნიერი თავისი მნიშვნელობით ამ ნაშრომს თვლის მეორე ნიგნად ბიბლიის შემდეგ.

ნიუტონს მათემატიკის გენიადაც მიიჩნევენ. ჟოზეფ ლუი ლაგრანჟის (ფრანგი მათემატიკოსი და მექანიკოსი, პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი) თქმით: „ნიუტონი უდიდესი გენიოსია, რომელიც კი ოდესმე გაჩენილა ამქვეყნად და ასევე ყველაზე ილბიანი, ვინაიდან სამყაროს სისტემის დადგენა მხოლოდ ერთხელაა შესაძლებელი“.

ნიუტონის „საწყისებმა“, რომელიც უხვად შეიცავს მათემატიკურ, კერძოდ, გეომეტრიულ ცნებებსა და წარმოდგენებს და მათ გამოყენებას ციურ სხეულთა მოძრაობის შესწავლაში, ახალი ეპოქა შექმნა ბუნებისმცოდნეობის განვითარების ისტორიაში. ნიუტონმა პირველმა შექმნა დედამიწისა და ცის მექანიკის ერთიანი მწყობრი სისტემა, რომელიც საფუძვლად დაედო მთელ კლასიკურ მექანიკას.

ნიუტონისათვის მათემატიკა იყო ფიზიკური ამოცანების ამოხსნის იარაღი, ხოლო ასტრონომია – გიგანტური კოსმიური ლაბორატორია, სადაც მონმდებოდა მისი ფიზიკური იდეები.

ნიუტონის აღმოჩენათა შორის ყველაზე მნიშვნელოვანია მსოფლიო მიზიდულობის კანონი, რომელიც ციური სხეულების მოძრაობას წარმართავს.

ნიუტონმა დაასკვნა, რომ მთვარეს თავის ორბიტაზე აჩერებს დედამიწის მიზიდულობის ძალა, ხოლო პლანეტებს, მათ შორის დედამიწასაც, თავიანთ ორბიტაზე აჩერებს მზის მიზიდულობის მძლავრი ძალა. ამასთანავე, ნიუტონმა დაამტკიცა, რომ მიზიდულობის ძალა პირდაპირპროპორციულია მიმზიდველი სხეულების მასებისა და უკუპროპორციულია მათ შორის მანძილის კვადრატისა.

მსოფლიო მიზიდულობის კანონი ბუნების უდიდესი და მარადიული კანონია.

მექანიკის გარდა ნიუტონს მნიშვნელოვანი ღვაწლი მიუძღვის მათემატიკისა და ფიზიკის განვითარების საქმეში. ნიუტონის მიერ შექმნილმა მათემატიკურმა აპარატმა იგი მიიყვანა ფუნდამენტურ კონცეფციამდე, რომელიც მეცნიერმა ასე გამოთქვა: „სამყარო იმართება დიფერენციალური განტოლებებით“.



მოცემული თავის დამატებითი ელექტრონული რესურსები იხილეთ QR-კოდზე.



III თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. იპოვეთ 360-ის:

- ა) $\frac{2}{5}$; ბ) $\frac{7}{9}$; გ) $\frac{23}{36}$; დ) $\frac{12}{270}$;
ე) 60%; ვ) 75%; ზ) 120%.

2. გამოთვალეთ:

- ა) 150-ის $\frac{2}{3}$ -ის 10%; ბ) 240-ის 30%-ის $\frac{3}{8}$;
გ) 180-ის $\frac{5}{9}$ -ის $\frac{1}{5}$; დ) 270-ის 40%-ის 25%.

3. ქლიავის მასის 55% წყალია. რამდენი გრამი წყალია 450 გრამ ქლიავში? რამდენი ლიტრი წყალია 3 კგ ქლიავში? (1ლ წყლის მასა 1 კილოგრამია)

4. კალათაში 4,5 კგ ატამია, ხილის მასის 60 % წყალია, დარჩენილი მასის $\frac{1}{3}$ კი – შაქარი. რა რაოდენობის შაქარია მთელ ხილში?

5. 5 ლიტრი წვენი 12 ლარი ღირს, რა ეღირება: ა) 8 ლიტრ წვენი; ბ) 12 ლიტრი წვენი?

6. 3 კოლოფი ჩაი 14 ლარი და 10 თეთრი ღირს.

- ა) რა ღირს 5 კოლოფი ჩაი?
ბ) 50 ლარად მაქსიმუმ რამდენ კოლოფის ყიდვას შეძლებთ?

7. ტელეფონის მეხსიერების 128 GB-დან დაკავებულია 96 GB. მეხსიერების რამდენი პროცენტი დარჩა თავისუფალი?

8. ამაზონის ტყის 17% უკვე განადგურებულია, რაც დაახლოებით 1,1 მილიონი კვ. კილომეტრია. რა ფართობის იყო ტყე თავდაპირველად? (პასუხი დაამრგვალეთ მეათედებამდე სიზუსტით).

9. ფარმაცევტმა დაამზადა 15 გრამი მაღამო, რაც დანიშნული დოზის 75%-ია. რამდენი გრამი იყო სრული დოზა?

10. მიღებული 250 ბოთლი ზეთიდან 20% შემოწმდა, შემოწმებულიდან 8% ვადაგასული აღმოჩნდა. რამდენი ბოთლი ზეთი იყო ვადაგასული?



11. დასასვენებელ პარკში 150 ხიდან 80% მარადმწვანეა, ხოლო მარადმწვანე ხეების 30% – ნაძვი.

სულ რამდენი ნაძვია პარკში? მთელი ხეების რამდენ პროცენტს შეადგენს ნაძვის ხეები?

12. გადაადნეს ორი სხვადასხვა ხარისხის ოქრო, პირველი – 400 გრამი, რომელიც შეიცავდა 45 % ვერცხლს, მეორე კი – 600 გრამი, რომელიც შეიცავდა 20 % ვერცხლს. რამდენ პროცენტ ვერცხლს შეიცავს ახალი შენადნობი?
13. თუ 3 ლიტრ 40 %-იან მჟავას შევურევთ 5 ლიტრ 56%-იანი მჟავას, რამდენ პროცენტთან მჟავას მივიღებთ?
14. მართკუთხედის გვერდების შეფარდებაა 3:8. იპოვეთ მართკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე, თუ მისი პერიმეტრი 1,21 დმ-ია.
15. ა) 130 დაყავით 2-ის, 3-ის და 5-ის პროპორციულ ნაწილებად;
ბ) 207 დაყავით 0,3-ის, 1,2-ის და 0,8-ის პროპორციულ ნაწილებად;
გ) 190 დაყავით $\frac{1}{3}$ -ის, $\frac{1}{2}$ -ისა და $\frac{3}{4}$ -ის პროპორციულ ნაწილებად.
16. რუკაზე 2 სმ შეესაბამება 10 კმ-ს. იპოვეთ რუკის მასშტაბი. თუ ქალაქებს შორის მანძილი 65 კმ-ია, რამდენი სანტიმეტრი იქნება ამ ქალაქებს შორის მანძილი რუკაზე?
17. 4 კგ ხახვი m ლარი ღირს, რა თანხა დაგჭირდებათ:
ა) 2 კგ; ბ) 8 კგ; გ) 7 კგ; დ) n კგ
ხახვის საყიდლად?
18. საქართველოს წითელ წიგნში გადაშენების პირას მყოფი დაახლოებით 400 მცენარისა და ცხოველის სახეობაა შეტანილი, აქედან 55% მცენარეებია, ხოლო ამ მცენარეებიდან 30 % იზრდება მხოლოდ კავკასიის მაღალმთიანეთში და არსად სხვა ადგილას აღარ გვხვდება. რამდენი ენდემური მცენარეა შეტანილი საქართველოს წითელ წიგნში?
19. სეზონის ბოლოს გიამ და ლიამ ორი ნაყინი 20%-იანი ფასდაკლებით 2 ლარად და 40 თეთრად შეიძინეს. რა ღირდა ნაყინი ფასდაკლებამდე?
20. სკოლის სამეცნიერო გამოფენისთვის მაკეტის მოსამზადებლად 240 ლარი გამოიყო. ამ თანხის 15% მაკეტის ზედაპირის გაფორმებაზე დაიხარჯა, დანარჩენი კი — ძირითადი კონსტრუქციის მასალებზე. რამდენი ლარი დაიხარჯა გაფორმებაზე და რამდენი ლარი – ძირითადი კონსტრუქციის მასალებზე?
21. გასულ წელს გუნდმა მოიგო 15 თამაში, წელს – 18. რამდენი პროცენტით გაიზარდა მოგებული თამაშების რაოდენობა?
22. ფაილის ჩამოტვირთვას 40 წმ სჭირდებოდა. ოპტიკური ინტერნეტის დამონტაჟების შემდეგ დრო 1,6-ჯერ შემცირდა. რამდენი პროცენტით შემცირდა ჩამოტვირთვის დრო?
23. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ:
ა) ერთი კუთხე მეორის 25 %-ია; ბ) ერთი კუთხე 20%-ით ნაკლებია მეორეზე.
24. ძმრის ესენციაში ძმრის პროცენტული კონცენტრაცია 70%-ია. სუფრის ძმარში კი – 6%. რამდენი გრამი წყალი უნდა დავუმატოთ 210 გ ესენციას, რომ მივიღოთ სუფრის ძმარი?

25. იპოვეთ ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან უმცირესი, თუ:
- ა) ორი შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხის ჯამი 210° -ია;
 - ბ) შიგა ცალმხრივი კუთხეების სხვაობა 18° -ია.
26. ბანაკში ბავშვების 55% გოგონაა. სულ რამდენი მოსწავლეა ბანაკში, თუ ბიჭების რაოდენობა 90-ით ნაკლებია გოგონების რაოდენობაზე?
27. რამდენი გრამი მარილი უნდა ჩავყაროთ 90 გრამ წყალში, რომ მივიღოთ 10 %-იანი ხსნარი?
28. 2 ხაზაზი 2 საათში 36 პურს აცხობს. რამდენ პურს გამოაცხობს:
- ა) 6 ხაზაზი 2 სთ-ში;
 - ბ) 2 ხაზაზი 4 სთ-ში;
 - გ) 3 ხაზაზი 5 სთ-ში?
29. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები 3-ის, 4-ის და 5-ის პროპორციულია, იპოვეთ უდიდესი გვერდის სიგრძე, თუ სამკუთხედის პერიმეტრი 3,6 დმ-ია.
30. ციფრულ ალბომში ადრე 100 ფოტო ეტეოდა. ახალი პროგრამა თითო ფოტოს ზომას 20%-ით ამცირებს, ამიტომ თითო ფოტო ძველთან შედარებით ნაკლებ ადგილს იკავებს. რამდენი ფოტო დაეტევა ახლა იმავე ალბომში? რამდენი პროცენტით მეტი ფოტო დაეტევა?
31. მაკეტზე, რომლის მასშტაბია 1:200, შენობის სიმაღლეა 12 სმ. რამდენი მეტრია რეალური შენობა? რა იქნებოდა შენობის სიმაღლე 1:150 მასშტაბის მაკეტზე?



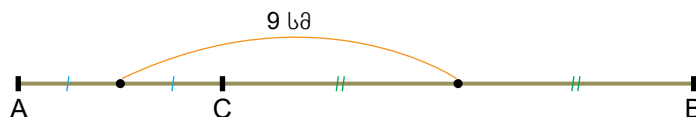
32. ნონას და ნანას თანხები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4, ნანას და ნინოს თანხები კი – როგორც 3:7, როგორ შეეფარდება ნონას, ნანას და ნინოს თანხები ერთმანეთს?
33. 90 კმ/სთ სიჩქარით მოძრავეს ავტომობილმა ორი ქალაქს შორის მანძილი 1 საათსა და 30 წუთში გაიარა, რა დრო დასჭირდება იმავე მანძილის გასაგზავლად 60 კმ/სთ სიჩქარით მოძრავე ავტომობილს?

34. 6 დურგალს სამუშაო 10 დღეში უნდა შეესრულებინა, ორი დღის მუშაობის შემდეგ მათ კიდევ ორი დურგალი შემოუერთდათ. რა დრო დასჭირდებოდათ მათ მთელი სამუშაოს შესასრულებლად?

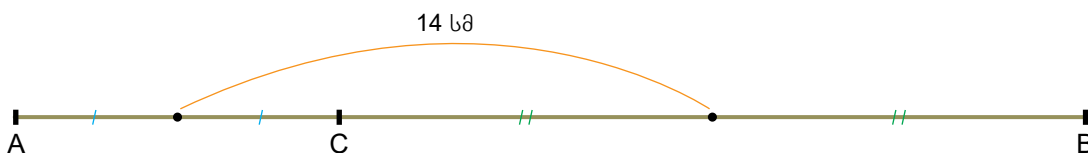
35. ელენემ დაფაზე დაწერა $\frac{4}{5}$, ნიკამ წილადის მრიცხველი გაზარდა 50%-ით, მნიშვნელი კი – 20%-ით. რას უდრის ნიკას მიერ მიღებული წილადის მნიშვნელობა? რამდენი პროცენტით გაიზარდა ახალი წილადი თავდაპირველთან შედარებით?

36. AB მონაკვეთზე აღებულია C წერტილი ისე, რომ $AC : CB = 3 : 7$. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ:

ა) AC და CB მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის მანძილი 9 სმ-ია;



ბ) AC და AB მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის მანძილი 14 სმ-ია.



37. მოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთი მეორეზე 50° -ით მეტია. იპოვეთ კუთხე უმცირესი კუთხის ბისექტრისასა და ამ კუთხის რომელიმე გვერდის გაგრძელებას შორის.

38. 12 ცხენის გამოსაკვებად მოიმარაგეს 15 დღის სამყოფი თივა. ხუთი დღის შემდეგ 4 ცხენი სხვა ფერმაში გადაიყვანეს. რამდენი დღე ეყოფათ დარჩენილი თივის მარაგი?

39. 3 ერთნაირ ტუმბოს სარდაფიდან წყლის ამოტუმბვა 5 საათში შეუძლია. იმის გამო, რომ ერთი ტუმბო გაფუჭდა, დანარჩენი ორი ტუმბო 25 %-ით მეტი სიმძლავრით ამუშავეს. რამდენ საათში ამოტუმბავენ წყალს?

40. იპოვეთ განტოლების ფესვი:

ა) $7a - 10 = 5 - 2a$;

ბ) $p - \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot p$;

გ) $3m - 8 = m + 6$;

დ) $\frac{2}{3}x = \frac{1}{5}$;

ე) $6y = 5y$;

ვ) $2,3 - 0,6b = 5,2 - 0,5b$;

ზ) $4,2x - 5,1x = 0$;

თ) $0,8k + 14 = 2 - 1,6k$.

41. m-ის რა მნიშვნელობისთვის იქნება $4m - 11$ გამოსახულების მნიშვნელობა

ა) 2;

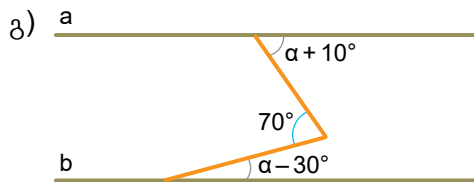
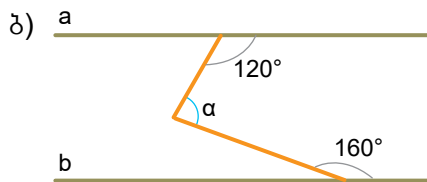
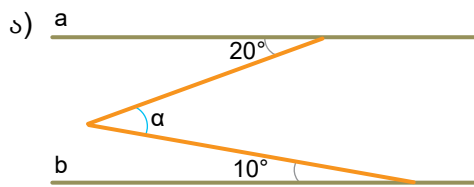
ბ) 5;

გ) -11;

დ) -2,2.

42. x -ის რა მნიშვნელობისთვის იქნება
- ა) $\frac{4x-3}{5}$ და $\frac{2-3x}{2}$ წილადების მნიშვნელობები ტოლი?
- ბ) $\frac{3-x}{3}$ და $2x + \frac{1}{2}$ გამოსახულებების მნიშვნელობები მოპირდაპირე რიცხვები?
43. რამდენი ამონახსნი აქვს განტოლებას:
- ა) $(x-3)(x-11)=0$; ბ) $(x-9)(x+7)=0$;
- გ) $|x|=-19$; დ) $2(x-3)-4=4x-6$?
44. იპოვეთ განტოლების ნატურალური ფესვი:
- ა) $x(x+1)=42$; ბ) $x(x+2)=168$.
45. ტოლფასია თუ არა $|x-8|-1=10$ და $||x-1|-2|=2$ განტოლებები?
46. ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი 12-ია, თუ ამ რიცხვს გავამრავლეთ 4-ზე და მიღებულ ნამრავლს გამოვაკლებთ 55-ს, მივიღებთ უმცირეს კენტ სამნიშნა რიცხვს. იპოვეთ ეს რიცხვი.
47. სამ თაროზე ერთად 22 წიგნია. პირველ თაროზე 2-ჯერ მეტი წიგნია, ვიდრე მეორეზე და 2-ით ნაკლები, ვიდრე მესამეზე. რამდენი წიგნია მესამე თაროზე?
48. კატერმა მდინარის დინების მიმართულებით 3 საათში 30 კილომეტრით მეტი გაიარა, ვიდრე საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობისას 2 საათში. იპოვეთ მდინარის სიჩქარე, თუ კატერის საკუთარი სიჩქარეა 20 კმ/სთ.
49. ავეჯის მაღაზიაში სამზარეულოს მაგიდა 4 სკამით 720 ლარი ღირს. რა ღირს 1 სკამი, თუ მისი ფასი მაგიდის ფასის 35%-ია.
50. ბიბლიოთეკისთვის წიგნი დროულად რომ ჩაებარებინა, ნიკოს ყოველდღიურად 40 გვერდი უნდა წაეკითხა, მაგრამ დღეში 15 გვერდით ნაკლებს კითხულობდა, ამიტომ წიგნი 6 დღით გვიან ჩააბარა. რამდენი გვერდისგან შედგება წიგნი? რამდენ დღეში უნდა წაეკითხა გვეგით?
51. ღონისძიების ორგანიზატორებმა დაითვალეს, რომ თუ თითოეულ მაგიდას 10 სტუმრისთვის გათვლიან, მაშინ 8 სტუმარი ადგილის გარეშე დარჩება, ხოლო თუ თითოეულ მაგიდასთან 12 სტუმარს მოათავსებენ, მაშინ 4 მაგიდა თავისუფალი აღმოჩნდება. რამდენ სტუმარს ელოდებიან ღონისძიებაზე?
52. რამდენი პროცენტით მეტი შაქრის ყიდვას შეძლებთ 20 %-იანი ფასდაკლებისას?
53. კოლბის მესამედი 60%-იანი სპირტიტაა შევსებული. რამდენ პროცენტთან ხსნარს მივიღებთ, თუ კოლბას მტკნარი წყლით შევავსებთ?

54. იპოვეთ α -ს გრადუსული ზომა, თუ a და b წრფეები პარალელურია:



55. ცნობილია, რომ მდინარის სიჩქარეა 2 კმ/სთ, ნიჩბებიანი ნავის საკუთარი სიჩქარე კი – 8 კმ/სთ. რა დრო შეუძლია იცუროს გიამ ნავით მდინარის დინების მიმართულებით, რომ უკან 4 საათში დაბრუნდეს?



III თავის მოკლე მიმოხილვა

$$\frac{1}{100} = 1\%$$

$$\frac{a}{100} = a\%$$

- რიცხვი რომ **პროცენტის სახით ჩავწეროთ**, საჭიროა ეს რიცხვი გავამრავლოთ 100-ზე და მარჯვნივ მივუწეროთ %.
- რიცხვის პროცენტული ჩანაწერი რომ წილადის სახით ჩავწეროთ, საჭიროა ეს რიცხვი გავყოთ 100-ზე.
- **a რიცხვის b პროცენტი** ტოლია $a \cdot \frac{b}{100} = \frac{ab}{100}$.
- **რიცხვი, რომლის b% არის a**, ტოლია $a : \frac{b}{100} = \frac{a}{b} \cdot 100$.
- **a რიცხვი არის b რიცხვის** $\frac{a}{b} \cdot 100\%$.
- ორ სიდიდეს **პირდაპირპროპორციული** ეწოდება, თუ ერთ-ერთი სიდიდის რამდენჯერმე გაზრდა (შემცირება) იწვევს მეორის იმდენჯერვე გაზრდას (შემცირებას).
- პირდაპირპროპორციულ სიდიდეთა შესაბამისი მნიშვნელობების შეფარდება მუდმივი სიდიდეა.
- **რიცხვი დავყოთ მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად** ნიშნავს, რომ ეს რიცხვი დავყოთ ისეთ შესაკრებებად, რომლებიც მოცემული რიცხვების პროპორციულია.
- ორ სიდიდეს **უკუპროპორციული** ეწოდება, თუ ერთი სიდიდის რამდენჯერმე გადიდება (შემცირება) იწვევს მეორის იმდენჯერვე შემცირებას (გადიდებას).
- უკუპროპორციულ სიდიდეთა შესაბამისი მნიშვნელობების ნამრავლები ტოლია.
- უცნობის შემცველ ტოლობას **განტოლება** ეწოდება.
- უცნობის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც განტოლება გადაიქცევა სწორ რიცხვით ტოლობად, განტოლების **ამონახსნი (ფესვი)** ეწოდება.
- განტოლებებს, რომელთა ამონახსნთა სიმრავლეები ტოლია, **ტოლფასი განტოლებები** ეწოდებათ.
- თუ განტოლების ერთი ნაწილიდან მეორეში გადავიტანთ შესაკრებს მოპირდაპირე ნიშნით, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.
- თუ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ნულის არატოლ ერთსა და იმავე რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.

თავი IV

სამკუთხედი



შეისწავლით:

- სამკუთხედსა და მის ელემენტებს;
- სამკუთხედების კლასიფიკაციას მისი გვერდებისა და კუთხეების მიხედვით;
- სამკუთხედების, როგორც გეომეტრიული ფიგურის, როლს რეალურ ცხოვრებაში;
- სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამსა და სამკუთხედის გარე კუთხეს.

შეძლებთ:

- სამკუთხედების ამოცნობას და დახაზვას მისი ელემენტების მიხედვით (ტოლგვერდა, ტოლფერდა, სხვადასხვაგვერდა, მახვილკუთხა, მართკუთხა, ბლაგვკუთხა);
- სამკუთხედის გარე კუთხის გრადუსული ზომის პოვნას.

1. სამკუთხედი



მიზანი:

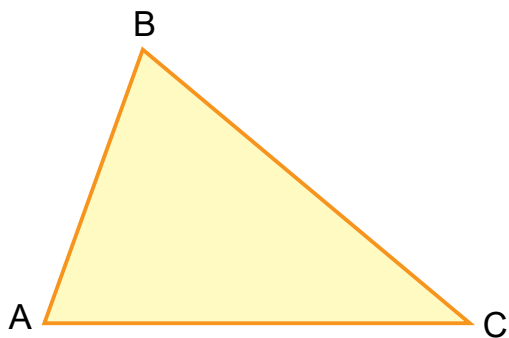
- განვმარტოთ სამკუთხედის ელემენტები.
- დავინახოთ სამკუთხედის, როგორც გეომეტრიული ფიგურის, როლი ბუნებასა და ყოველდღიურ ცხოვრებაში.

რუკის მიხედვით დაადგინეთ, დაახლოებით რა სიგრძისაა ბერმუდის სამკუთხედის გვერდები (გაითვალისწინეთ, რომ ნახაზის 1 სმ შეესაბამება დაახლოებით 320 კმ-ს).



წინა კლასებიდან ჩვენ უკვე ვიცნობთ გეომეტრიულ ფიგურას – სამკუთხედს. ახლა უკვე შეგვიძლია მისი ელემენტების დახასიათება.

სამკუთხედის დასახაზად საჭიროა სიბრტყეზე ავიღოთ ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილი და შევაერთოთ ისინი წყვილ-წყვილად მონაკვეთებით. მიღებულ ფიგურას (სამკუთხედს) სამი გვერდი და სამი კუთხე აქვს.

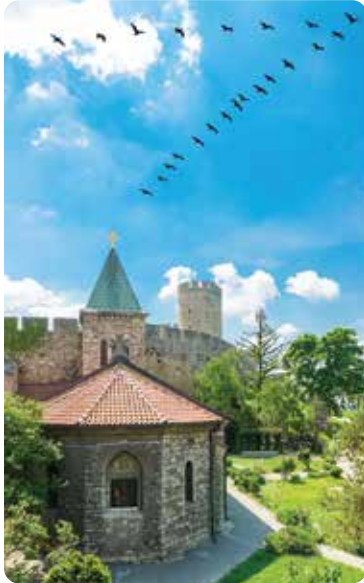


ნახაზზე მოცემულია სამკუთხედი.

A, B და C წერტილებს **სამკუთხედის წვეროები** ეწოდება.

AB, BC და AC მონაკვეთები **სამკუთხედის გვერდებია**.

BAC კუთხის $\triangle ABC$ -ში მოქცეულ ნაწილს სამკუთხედის **BAC კუთხე**, იგივე $\angle A$, ეწოდება. ასევე სამკუთხედის კუთხეებია $\angle B$ და $\angle C$.



სამკუთხედი ბევრად მეტია, ვიდრე უბრალოდ გეომეტრიული ფიგურა. ჯერ კიდევ ძველ დროში შენიშნეს ინჟინრებმა და სამხედრო მშენებლებმა, რომ სამკუთხედი მდგრადი ფიგურაა და მისი გამოყენება კონსტრუქციებში ბევრად უფრო ხელსაყრელია, ვიდრე სხვა გეომეტრიული ფიგურების. ამის გამო სამკუთხედებს ხშირად ვხვდებით პირამიდების, ხიდეების, კოშკების, საბრძოლო და სხვადასხვა კონსტრუქციების შექმნის დროს.

ვიდრე ადამიანი მათემატიკის ცოდნას დაეუფლებოდა, სამკუთხედის ფორმას სამყაროში იქამდეც ჰქონდა ბუნებრივი დატვირთვა. იგი, ძირითადად, ფიზიკური მდგრადობის პრინციპს ეფუძნებოდა. მაგალითად, მთებს, მყინვარებს, უმეტესად კონუსური ან სამკუთხა ფორმა აქვთ. გადამფრენ ფრინველთა გუნდი ხშირად Δ (სამკუთხა) ფორმით მიფრინავს, რაც ჰაერის წინააღმდეგობას ამცირებს და ენერგიას ზოგავს.

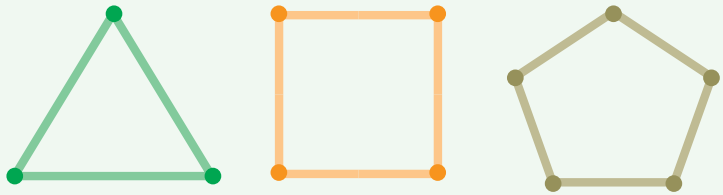


მყინვარწვერი, იგივე მწვერვალი ყაზბეგი

გაიხსენეთ!

პითაგორელების აზრით, რიცხვი „3“ სიმყარისა და სიმტკიცის გამომხატველი სიმბოლო იყო.

თქვენც დარწმუნდით ყოველივე ზემოთ თქმულში და გამოთქვით ვარაუდი, რატომ არის სამკუთხედი მტკიცე ფორმა. ამისათვის ააგეთ რამდენიმე გეომეტრიული ფიგურა (ოთხკუთხედი, სამკუთხედი, ხუთკუთხედი) ჩხირების, პლასტილინის ან ნების გამოყენებით. შეამოწმეთ, რომელი მათგანი შეინარჩუნებს ფორმას დანოლის (ზემოქმედების) დროს და გამოიტანეთ შესაბამისი დასკვნა.



1. ჩამოთვალეთ, სად ხედავთ სამკუთხედებს თქვენ გარშემო?
2. ქვემოთ მოცემულ ნახატებში უამრავი სამკუთხედია. შეეცადეთ, თქვენც დახატოთ რაიმე მხოლოდ სამკუთხედების გამოყენებით.



ეს საინტერესოა



რომაული „სოლი“ (სამკუთხა საბრძოლო წყობა)

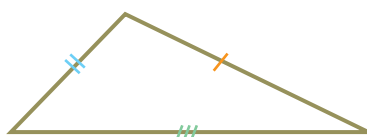
რომაული სოლისებური წყობა — რომაული არმიის საბრძოლო განლაგება იყო, რომლის დროსაც ჯარისკაცები სამკუთხედის (სოლის) ფორმით ეწყობოდნენ. წყობის წვერი მიმართული იყო მტრისკენ, რათა ერთ წერტილზე მოეყარათ ძალა და გაერღვიათ მონინალმდევის რიგები. ეს წყობა განსაკუთრებით ეფექტური იყო შეტევის დროს და მტრის თავდაცვის გასატეხად გამოიყენებოდა.

2. სამკუთხედების კლასიფიკაცია



მიზანი:

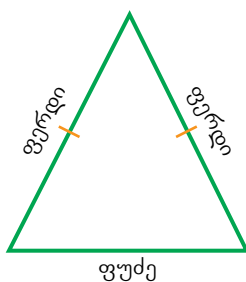
- დავყოთ სამკუთხედები მისი ელემენტების, გვერდებისა და კუთხეების მიხედვით ჯგუფებად.



ნახ. 1

გვერდების მიხედვით სამკუთხედები იყოფა სამ ტიპად: სხვადასხვაგვერდა, ტოლფერდა და ტოლგვერდა სამკუთხედებად.

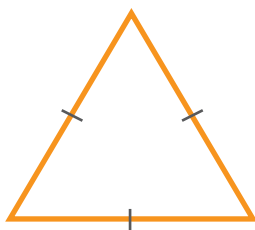
სამკუთხედს, რომლის სამივე გვერდი სხვადასხვა სიგრძისაა, **სხვადასხვაგვერდა სამკუთხედი** ეწოდება (ნახ. 1).



ნახ. 2

სამკუთხედს, რომელსაც ორი გვერდი აქვს ტოლი, **ტოლფერდა სამკუთხედი** ეწოდება (ნახ. 2).

ტოლ გვერდებს სამკუთხედის ფერდები, ხოლო მესამე გვერდს ტოლფერდა სამკუთხედის **ფუძე** ეწოდება. ფერდებს შორის მდებარე კუთხეს **წვეროსთან მდებარე კუთხე** ეწოდება, ხოლო დანარჩენ ორს — **ფუძესთან მდებარე კუთხეები**.



ნახ. 3

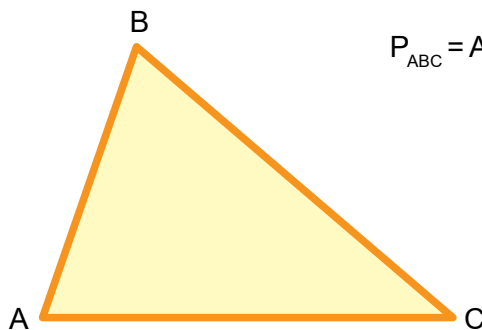
სამკუთხედს, რომლის სამივე გვერდი ტოლია, **ტოლგვერდა სამკუთხედი** ეწოდება (ნახ. 3).

სამკუთხედის სამივე გვერდის სიგრძეთა ჯამს **სამკუთხედის პერიმეტრი** ეწოდება.

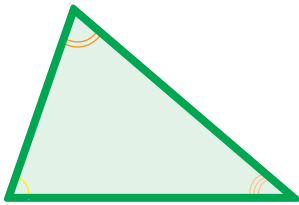
პერიმეტრი P ასოთი აღინიშნება. ABC სამკუთხედის პერიმეტრს ვწერთ ასე:

პერიმეტრი (ბერძნ. perimetros — „გარშემო ზომა“) არის გეომეტრიული ფიგურის საზღვრის სიგრძე.

$$P_{ABC} = AB + BC + AC$$

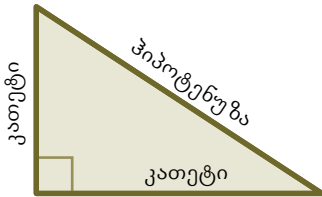


კუთხეების მიხედვით სამკუთხედები, აგრეთვე, სამ ტიპად იყოფა: მახვილკუთხა, მართკუთხა, ბლაგვკუთხა. განვიხილოთ თითოეული.



ნახ. 1

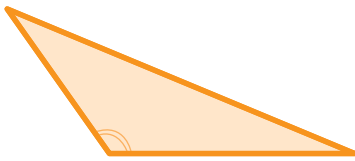
მახვილკუთხა ეწოდება სამკუთხედს, რომლის სამივე კუთხე მახვილია (ნახ. 1).



ნახ. 2

მართკუთხა ეწოდება სამკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი კუთხე მართია (ნახ. 2).

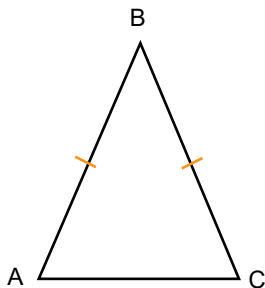
მართი კუთხის შემცველ გვერდებს **კათეტები** ეწოდება, ხოლო მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდს – **ჰიპოტენუზა**.



ნახ. 3

ბლაგვკუთხა ეწოდება სამკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი კუთხე ბლაგვია (ნახ. 3).

ამოცანა



ABC სამკუთხედის ორი გვერდი ტოლია ($AB=BC$). იპოვეთ AB და AC გვერდების სიგრძეები, თუ ფერდი ფუძეზე 2 სმ-ით მეტია და $P_{\triangle ABC}=22$ სმ.

ამოხსნა:

$$AC \equiv x \Rightarrow AB = x + 2.$$

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = x + 2 + x + 2 + x = 22.$$

$$3x=18. \text{ ე.ი. } x=6.$$

$$AC=6; AB=BC=8.$$



1. რას ნიშნავს – სამკუთხედი ტოლგვერდაა?
2. როგორია სამკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია 5სმ, 3,5 სმ და 5სმ?
3. რა ეწოდება ტოლფერდა სამკუთხედის ტოლ გვერდებს?
4. როგორია სამკუთხედი, რომლის სამივე კუთხე მახვილია?
5. როგორ სამკუთხედს ეწოდება მართკუთხა? ბლაგვკუთხა?
6. რა ეწოდება მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს?

გეომეტრია ცხოვრებაში

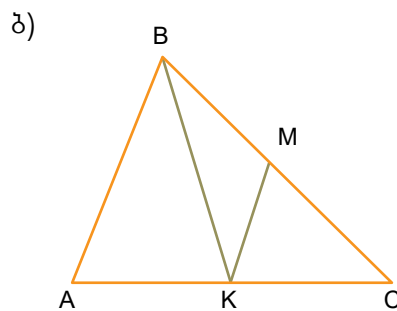
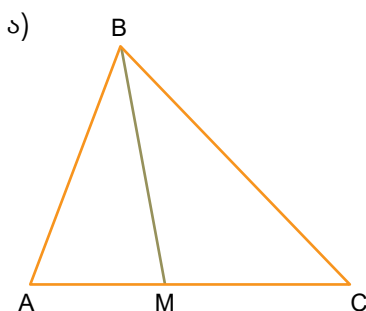
შენობების სახურავებს, უმეტესწილად, სხვადასხვა ტიპის სამკუთხედების ფორმა აქვს.

- როგორი ტიპის სამკუთხედის ფორმის სახურავებს ხედავთ ნახატებზე? სხვა როგორი ფორმის სახურავები გინახავთ?
- როგორ ფიქრობთ, რატომ არის მოსახერხებელი სამკუთხედის ფორმის სახურავები?



სავარჯიშოები

1. რამდენი სამკუთხედია ნახაზზე? (ჩამოთვალეთ).

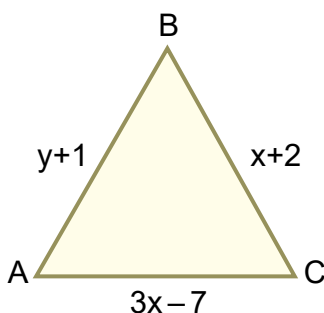


2. ტოლფერდა ABC სამკუთხედის ფერდის სიგრძეა 15 სმ. იპოვეთ ფუძის სიგრძე, თუ $P_{\triangle ABC} = 40$ სმ.
3. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეზე გარედან აგებულია ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის პერიმეტრია 135 სმ. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრია 167 სმ. იპოვეთ მოცემული ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი.
4. დახაზეთ სამკუთხედი, რომლის სამივე კუთხე მახვილია. გაზომეთ კუთხეები ტრანსპორტირით.
5. შეძლებთ დახაზოთ სამკუთხედი, რომელსაც ორი მართი კუთხე ექნება? ახსენით პასუხი.

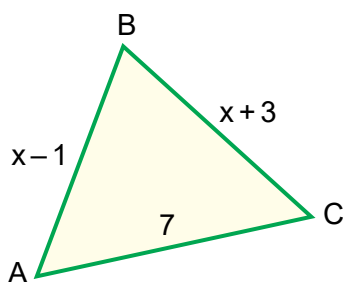


6. სკოლასთან განთავსებულია საგზაო ნიშანი, რომელიც მძღოლებს მოუწოდებს სიფრთხილისკენ. საგზაო ნიშანს აქვს ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმა, რომლის პერიმეტრია 210 სმ. როგორ ფიქრობთ, რამდენი დეციმეტრის ტოლია ამ სამკუთხედის რომელიმე ორი გვერდის სიგრძის ჯამი? აქვს თუ არა მნიშვნელობა, რომელი ორი გვერდის ჯამს იანგარიშებთ?

7. სახაზავის დახმარებით ფურცელზე დახაზეთ სამკუთხედი. გაზომეთ მისი გვერდების სიგრძეები და ამოიწერეთ ზომები. გამოიანგარიშეთ თქვენ მიერ დახაზული სამკუთხედის პერიმეტრი.
8. უჯრიან ფურცელზე სახაზავის დახმარებით დახაზეთ $\triangle AOB$ მართი კუთხე. OA მონაკვეთის სიგრძე აიღეთ 6 სმ, ხოლო OB მონაკვეთის სიგრძე აიღეთ 8 სმ. სახაზავის დახმარებით გაზომეთ AB მონაკვეთის სიგრძე და გამოიანგარიშეთ $\triangle AOB$ სამკუთხედის პერიმეტრი.
9. სამკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძეა 70 სმ. მეორე გვერდის სიგრძე მასზე 2 დმ-ით მეტია, ხოლო მესამე გვერდის სიგრძე 3 დმ-ით ნაკლები. რას უდრის ამ სამკუთხედის პერიმეტრი.
10. $\triangle ABC$ სამკუთხედის AB გვერდის სიგრძეა 15 სმ. AC გვერდის სიგრძე AB -ზე ორჯერ მეტია, ხოლო BC გვერდის სიგრძე 10 სმ-ით ნაკლებია AC გვერდის სიგრძეზე. იპოვეთ $\triangle ABC$ სამკუთხედის პერიმეტრი.
11. ტოლგვერდა სამკუთხედის პერიმეტრი მისი ერთ-ერთი გვერდის სიგრძეზე მეტია 22 სმ-ით. რას უდრის აღნიშნული სამკუთხედის პერიმეტრი?
12. სამკუთხედის პერიმეტრია 29 სმ. მისი ერთ-ერთი გვერდის სიგრძეა 9 სმ, ხოლო დანარჩენი გვერდებიდან ერთი მეორეზე 3,2 სმ-ით გრძელია. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე.
13. სამკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძე 13 დმ-ით ნაკლებია მეორე გვერდის სიგრძეზე და სამჯერ ნაკლებია მესამე გვერდის სიგრძეზე. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები, თუ მისი პერიმეტრია 73 დმ.
14. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი ფერდის და ფუძის სიგრძეთა ჯამია 27 სმ. ფუძის სიგრძე ფერდის სიგრძეზე 5 სმ-ით მეტია. რას უდრის სამკუთხედის პერიმეტრი?



15. $\triangle ABC$ ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეები (მეტრებში) მითითებულია ნახაზზე. რას უდრის $(x+y)$?



16. ABC ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის გვერდების სიგრძეები (მეტრებში) მითითებულია ნახაზზე. რას შეიძლება უდრიდეს მისი პერიმეტრი? რამდენი ამოხსნა აქვს ამ ამოცანას? რომელი გვერდები შეიძლება იყოს ტოლი?

17. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3:4. იპოვეთ გვერდების სიგრძეები, თუ სამკუთხედის პერიმეტრია 10,8 სმ.
18. სამკუთხედის პერიმეტრია 90 სმ. მონაკვეთი, რომლის ერთი ბოლო სამკუთხედის წვეროს ემთხვევა, ხოლო მეორე ბოლო ამ წვეროს მოპირდაპირე გვერდზე მდებარეობს, სამკუთხედს ყოფს ორ სამკუთხედად, რომელთა პერიმეტრებია 60 სმ და 70 სმ. იპოვეთ აღნიშნული მონაკვეთის სიგრძე.
19. შეადგინეთ 9-18 ამოცანებიდან რომელიმეს მსგავსი ამოცანა და შეამოწმეთ თქვენს მიერ შერჩეული რიცხვებით შედგება თუ არა სამკუთხედი (შემოწმება ჩაატარეთ სახაზავით).

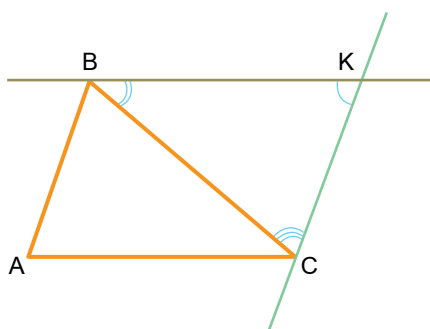


გამეორება

20. ჭეშმარიტია თუ არა:
- თუ მოსაზღვრე კუთხეები ტოლია, მაშინ ისინი მართია;
 - თუ ორი კუთხე ერთი და იმავე კუთხის მოსაზღვრეა, მაშინ ეს ორი კუთხე ტოლია;
 - თუ ორ კუთხეს აქვს საერთო გვერდი და მათი ჯამი 180° -ია, მაშინ ეს ორი კუთხე მოსაზღვრეა;
 - თუ ორ კუთხეს აქვს საერთო წვერო და ისინი ტოლია, მაშინ ეს ორი კუთხე ვერტიკალურია?



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის



1. ABC სამკუთხედის B წვეროზე გავლებულია AC გვერდის, ხოლო C წვერზე AB გვერდის პარალელური წრფეები, რომლებიც K წერტილში იკვეთება. რას უდრის BCK სამკუთხედის სამივე შიგა კუთხის ჯამი?



რას შეიძლება:

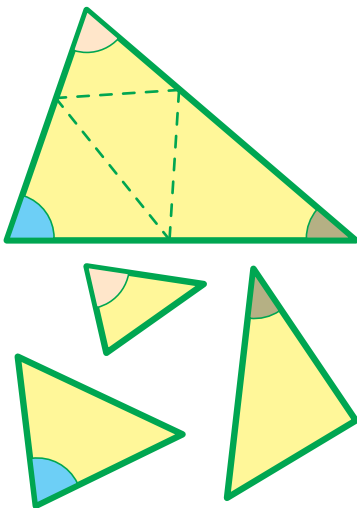
- სამკუთხედების კლასიფიკაციას გვერდების მიხედვით.
- სამკუთხედების კლასიფიკაციას კუთხეების მიხედვით;
- სამკუთხედის პერიმეტრის გამოთვლას მისი გვერდების სიგრძეების მიხედვით.

3. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი



მიზანი:

- დავადგინოთ, რისი ტოლია სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი.



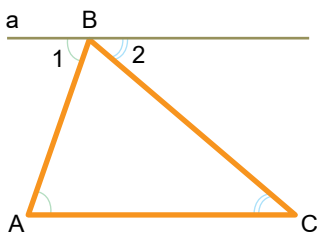
- გამოჭერთ სხვადასხვა სამკუთხედი ფერადი ქაღალდებისგან. მოაჭერთ კუთხეები და მიადეთ ისინი ერთმანეთს სამკუთხედის წვეროებით ისე, რომ მათ ერთმანეთი არ გადაფარონ. როგორი კუთხე მიიღეთ?
- დახაზეთ რამდენიმე სამკუთხედი. ტრანსპორტირის დახმარებით გაზომეთ მათი კუთხეები და იპოვეთ თითოეული სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. მიღებული შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს და გამოთქვით ვარაუდი.

სამკუთხედის კუთხეების გრადუსულ ზომათა ჯამი 180° -ია.

დამტკიცება:

სამკუთხედის B წვეროზე გავავლოთ AC გვერდის პარალელური a წრფე (ნახ. 1). $\angle C = \angle 2$, როგორც AC და a პარალელური წრფეებისა და BC მკვეთით მიღებული შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები. იმავე პარალელური წრფეებისა და AB მკვეთისათვის, ანალოგიურად დავასკვნით, რომ $\angle A = \angle 1$, ე.ი.

$$\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 180^\circ. \text{ რ.დ.გ.}$$

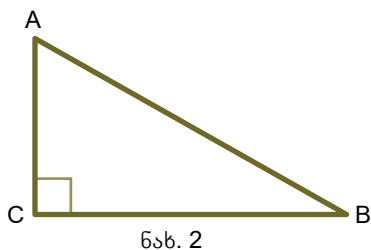


ნახ. 1

ვიპოვოთ კუთხე ნიშნავს,
ვიპოვოთ ამ კუთხის
გრადუსული ზომა.

ამოცანა.

ვიპოვოთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეების
ჯამი.



ამოხსნა:

ვიცით, რომ სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180° -ია, ე.ი. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, მაგრამ $\angle C = 90^\circ$. მივიღეთ, $\angle A + \angle B = 90^\circ$, ანუ ნებისმიერი მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეების ჯამი 90° -ია.



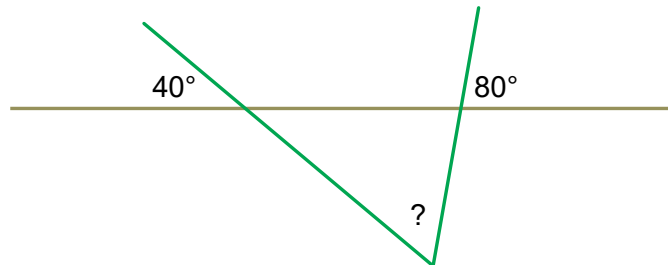
1. რამდენი ბლაგვი შიგა კუთხე შეიძლება იყოს სამკუთხედში? მართი?
2. არის თუ არა სამკუთხედი აუცილებლად მახვილკუთხა, თუ ვიცით, რომ მისი ორი კუთხე მახვილია?
3. თუ სამკუთხედის ორი კუთხის ჯამი 90° -ია, როგორია ეს სამკუთხედი?
4. თუ სამკუთხედის ერთი კუთხე 100° -ია, როგორია ეს სამკუთხედი?



სავარჯიშოები

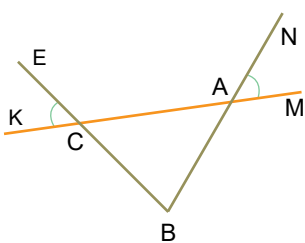
1. სახაზავის დახმარებით დახაზეთ სამკუთხედი. ტრანსპორტირის დახმარებით გაზომეთ მისი კუთხეების გრადუსული ზომები. რას უდრის სამივე კუთხის გრადუსულ ზომათა ჯამი?
2. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე კუთხე, თუ მისი ორი კუთხე ტოლია:
ა) 100° და 20° ; ბ) 23° და 35° ; გ) 49° და 43° .
3. სამკუთხედის ერთი კუთხის გრადუსული ზომაა 16° . დანარჩენი კუთხეების გრადუსული ზომები ტოლია. რას უდრის სამკუთხედის დანარჩენი კუთხეების გრადუსული ზომები?
4. სამკუთხედის კუთხეების გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $5 : 7 : 8$. იპოვეთ ამ სამკუთხედის კუთხეები.
5. სამკუთხედის რომელიღაც ორი კუთხის გრადუსულ ზომათა სხვაობა უდრის მესამე კუთხეს. იპოვეთ ასეთი სამკუთხედის უდიდესი კუთხის გრადუსული ზომა.
6. სამკუთხედის ერთი კუთხე 20° -ით ნაკლებია მეორეზე და 2-ჯერ ნაკლებია მესამეზე. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

7. თუ სამკუთხედის ნებისმიერი ორი კუთხის გრადუსულ ზომათა ჯამი აღემატება მესამე კუთხის გრადუსულ ზომას, მაშინ როგორია ეს სამკუთხედი, მახვილკუთხა, მართკუთხა თუ ბლაგვკუთხა?
8. გამოიანგარიშეთ ნახაზზე (?) ნიშნით აღნიშნული კუთხის გრადუსული ზომა.



9. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი მახვილი კუთხე მეორე მახვილ კუთხეზე ნაკლებია 20° -ით. იპოვეთ ამ სამკუთხედის მახვილი კუთხეების გრადუსული ზომები.
10. თუ ორ სამკუთხედს ტოლი აქვს ორი კუთხე, რა დამოკიდებულება იქნება მესამე კუთხეებს შორის?
11. შეიძლება თუ არა, სამკუთხედის უდიდესი კუთხე ნაკლები იყოს 60° -ზე? პასუხი ახსენით.
12. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ მისი ორი კუთხე ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:7, ხოლო მესამე კუთხე ამ ორი კუთხის ჯამის ტოლია.

მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის



1. ნახაზზე $\angle MAN = \angle KCE$.
რას უდრის $\angle BAC + \angle ACE$?

რას შეიძლება:

- სამკუთხედის უცნობი კუთხის პოვნას;
- სამკუთხედის კუთხეების ჯამის თვისების გამოყენებას ამოცანების ამოხსნისას და მიღებული პასუხის დასაბუთებას.

გეომეტრია ცხოვრებაში



სკოლის შესასვლელთან უნდა მოეწყოს პანდუსი ეტლით მოსარგებლე მოსწავლეებისთვის.

შესასვლელის სიმაღლე მინიმუმ არის 60 სმ. პანდუსის სიგრძე უნდა იყოს 3 მ.

- რომელი მონაკვეთი შეესაბამება პანდუსის სიმაღლეს?
- რომელი მონაკვეთი შეესაბამება პანდუსის სიგრძეს?
- რატომ მივიღეთ მართკუთხა სამკუთხედი?
- როგორ ფიქრობთ, უფრო მოსახერხებელი იქნება გრძელი პანდუსი თუ მოკლე? რატომ?
- რა შეიცვლება, თუ იმავე სიმაღლეზე პანდუსს უფრო გრძელს გავაკეთებთ?

რაც უფრო გრძელია პანდუსი იმავე სიმაღლეზე, მით ნაკლებია დახრა და მით უფრო მარტივია გადაადგილება.



ეს საინტერესოა



გიორგი ნიკოლაძე
(1888-1931)

გიორგი ნიკოლაძე

გეომეტრია ცოცხალი მეცნიერებაა, ის გვეხმარება რეალური სამყაროს მოდელირებაში, რაშიც ქართველ მეცნიერებს დიდი წვლილი მიუძღვით.

ერთ-ერთი ასეთი თვალსაჩინო წარმომადგენელია გიორგი ნიკოლაძე, რომელიც იყო ცნობილი მეცნიერი და საზოგადო მოღვაწე, მათემატიკოსი, მეტალურგი, ტერმინოლოგი, გამომგონებელი და სპორტსმენი (ტანმოვარჯიშე და მთამსვლელი). მან მათემატიკური სიზუსტე და გეომეტრია სპორტსა და ხელოვნებას დაუკავშირა.

გიორგი ნიკოლაძეს მათემატიკურ სკოლაში არ უსწავლია, თუმცა ბავშვობიდანვე გამოირჩეოდა ტექნიკური საგნების განსაკუთრებული ნიჭით.

გიორგი ნიკოლაძემ შექმნა თეორია ალგებრული წირების ალგებრული სისტემების შესახებ, კითხულობდა ლექციებს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ანალიზურ გეომეტრიასა და დიფერენციალურ გეომეტრიაში, ამავე დროს მან შექმნა პირველი ქართულენოვანი სახელმძღვანელოები გეომეტრიაში, რომლებიც მოსწავლეებს ეხმარებოდა რთული ფიგურების მარტივად აღქმაში.

ტექნიკურ დარგში საუკეთესო მიღწევების გამო დაწესებულია გიორგი ნიკოლაძის სახელობის პრემია და სტიპენდია. სახელმწიფო უნივერსიტეტში გახსნილია მისი სახელობის გეომეტრიის კაბინეტი. 2025 წელს საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სკვერში დაიდგა მისი ძეგლი.

4. სამკუთხედის გარე კუთხე



მიზანი:

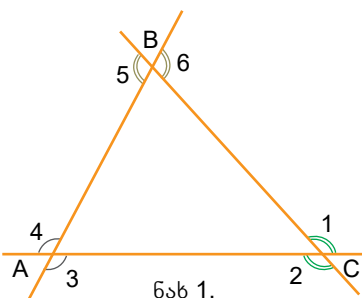
- განვმარტოთ სამკუთხედის გარე კუთხე;
- დავაკავშიროთ მისი გრადუსული ზომა სამკუთხედის შიგა კუთხეებთან.



ბიჭი სკუტერით ნაყინის ჯიხურიდან პარკის გასასვლელისკენ მიემართება. დააკვირდით ილუსტრაციას და უპასუხეთ, რამდენ გრადუსიანი კუთხით მოუნწევს მას მოხვევა?

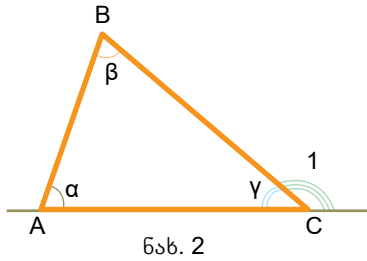
დახაზეთ ABC სამკუთხედი. აიღეთ D წერტილი ისე, რომ C წერტილი მდებარეობდეს A და D წერტილებს შორის. ტრანსპორტირით გაზომეთ $\angle BCD$, $\angle A$, $\angle B$. რა დამოკიდებულებაა ამ კუთხეებს შორის? გამოთქვით ვარაუდი.

სამკუთხედის რომელიმე კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს სამკუთხედის გარე კუთხე ეწოდება.



ნახ. 1-ზე კარგად ჩანს, რომ სამკუთხედს აქვს ექვსი გარე კუთხე, A წვეროსთან $\angle 4$ და $\angle 3$, B წვეროსთან $\angle 5$ და $\angle 6$, ხოლო C წვეროსთან — $\angle 1$ და $\angle 2$. თანაც $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$ და $\angle 3 = \angle 4$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები. რადგან თითო წვეროსთან ორი ტოლი გარე კუთხე გვაქვს, ამიტომ შემდგომში, როცა ვიტყვით, მოცემულია A წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე, ნახაზზე მოვნიშნავთ მხოლოდ ერთ გარე კუთხეს.

დავამტკიცოთ სამკუთხედის გარე კუთხის თვისება.

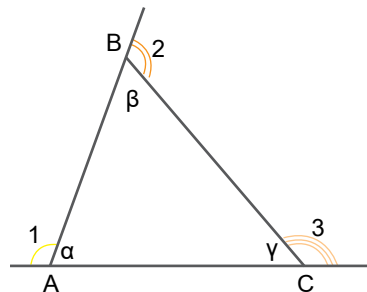


სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე შიგა კუთხეების ჯამის ტოლია.

განვიხილოთ $\triangle ABC$ (ნახ. 2). $\angle 1$ გარე კუთხეა. $\angle 1 + \gamma = 180^\circ$ მოსაზღვრე კუთხეების თვისების თანახმად, მაგრამ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. აქედან გამომდინარეობს $\alpha + \beta = \angle 1$. რ. დ. გ.

ამოცანა.

დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის გარე კუთხეების ჯამი 360° -ია (იგულისხმება თითო წვეროსთან აღებული თითო გარე კუთხე).



ამოხსნა:

მოსაზღვრე კუთხეების თვისების თანახმად:

$$\alpha + \angle 1 = 180^\circ$$

$$\beta + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\gamma + \angle 3 = 180^\circ$$

შევკრიბოთ სამივე ტოლობა, მივიღებთ:

$$\alpha + \beta + \gamma + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^\circ, \text{ მაგრამ } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \text{ ე.ი.}$$

$$\text{მივიღეთ რომ } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ.$$

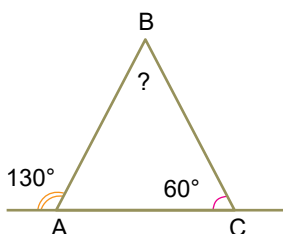


1. რას წარმოადგენს სამკუთხედის გარე კუთხე?
2. რას უდრის სამკუთხედის გარე კუთხეთა ჯამი?
3. შეიძლება თუ არა, სამკუთხედის ორი, სხვადასხვა წვეროსთან მდებარე, გარე კუთხე იყოს მახვილი?



სავარჯიშოები

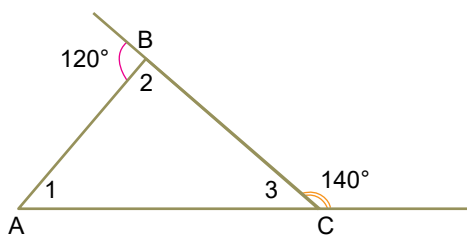
1-3. ამოცანებში ნახაზის მიხედვით აღადგინეთ პირობა და ამოხსენით:



1. იპოვეთ კუთხე B.



2. იპოვეთ α .



3. იპოვეთ $\angle 1$, $\angle 2$ და $\angle 3$.

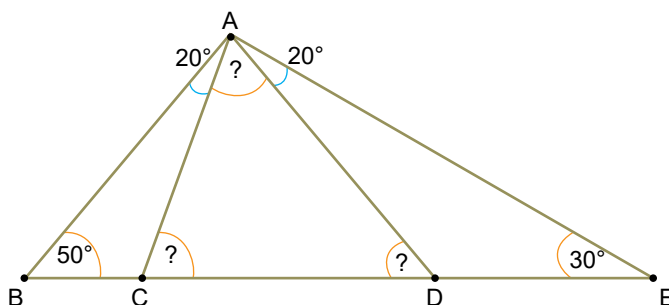
4. სამკუთხედის კუთხეთა გრადუსული ზომებია 78° და 55° . იპოვეთ მისი ექვსივე გარე კუთხის გრადუსული ზომა და ამ კუთხეების ჯამი. შეიცვლება თუ არა ეს ჯამი, თუ სამკუთხედის კუთხეების გრადუსულ ზომებს შევცვლით?

5. რას უდრის მართკუთხა სამკუთხედის უმცირესი გარე კუთხის გრადუსული ზომა?

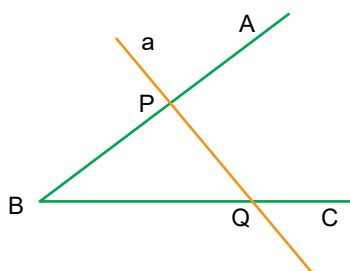
6. რას უდრის სამკუთხედის ექვსივე გარე კუთხის გრადუსულ ზომათა ჯამი?

7. შეიძლება თუ არა, სამკუთხედის სხვადასხვა წვეროსთან მდებარე ორი გარე კუთხე იყოს მართი?

8. ნახაზის მიხედვით, გამოიანგარიშეთ $\triangle ACD$ სამკუთხედის კუთხეთა გრადუსული ზომები.



9. $\triangle ABC$ სამკუთხედის ორი, განსხვავებული ზომის, გარე კუთხის ჯამია 280° . რამდენი გრადუსია $\triangle ABC$ სამკუთხედის უდიდესი კუთხე?



10. a წრფე $\triangle ABC$ კუთხის გვერდებს P და Q წერტილებში კვეთს ისე, როგორც ეს სურათზეა გამოსახული. იპოვეთ $\triangle ABC$ კუთხის სიდიდე, თუ $\angle APQ + \angle PQC = 211^\circ$.



რას შეიძლება:

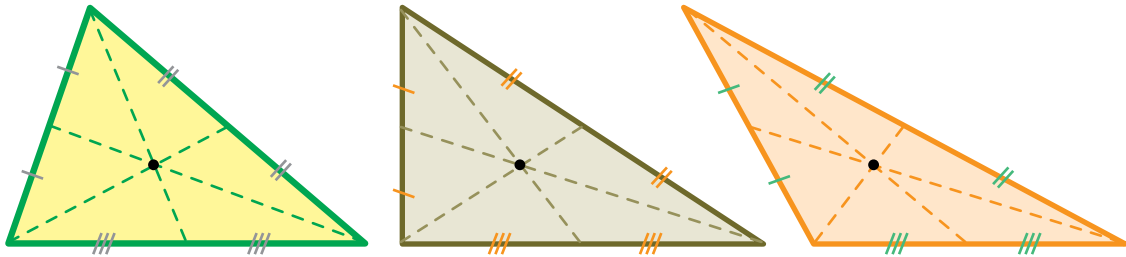
- სამკუთხედის გარე კუთხის ამოცნობას და მისი გრადუსული ზომის დადგენას;
- გარე კუთხის თვისების გამოყენებას ამოცანების ამოხსნისას.

5. სამკუთხედის მედიანა



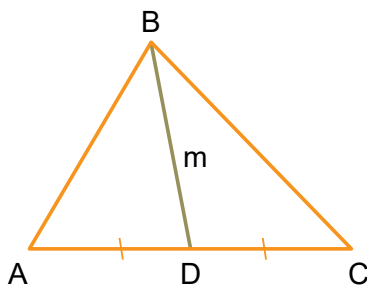
მიზანი:

- განვმარტოთ მედიანა;
- გავიგოთ, რას წარმოადგენს მედიანების გადაკვეთის წერტილი სამკუთხედისთვის.



დასაზეთ რამდენიმე სამკუთხედი. აიღეთ თითოეულისთვის გვერდების შუაწერტილები და შეაერთეთ ამ გვერდების მოპირდაპირე წვერობთან. რა შეამჩნიეთ?

თუ გვერდების ტოლ ნაწილებად გაყოფა სწორად შეასრულეთ, დაინახავთ, რომ ეს სამი მონაკვეთი ერთ წერტილში გადაიკვეთება.



ნახ. 1

სამკუთხედის მოცემული წვეროდან გავლებული მედიანა ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც ამ წვეროს სამკუთხედის მოპირდაპირე გვერდის შუა წერტილთან აერთებს (ნახ. 1).

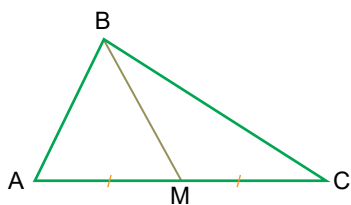
მედიანა აღვნიშნოთ m ასოთი (b გვერდისადმი გავლებული მედიანა – m_b -თი).

ნებისმიერი სამკუთხედის სამივე გვერდის მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება.

(ეს წინადადება ჯერჯერობით დაუმტკიცებლად მივიღოთ).

შეკითხვად:

- ის ფაქტი, რომ BD მონაკვეთი AC გვერდის მედიანაა, მოცემულობაში ასე ჩაინერგება $AD=DC$ და მოინიშნება ისე, როგორც ნახაზ 1-ზეა ნაჩვენები.



ამოცანა.

ABC სამკუთხედში გავლებულია BM მედიანა. რომელი სამკუთხედის, $\triangle ABM$ თუ $\triangle BMC$ -ს, პერიმეტრია მეტი და რამდენით, თუ $AB=8$ სმ და $BC=10$ სმ?

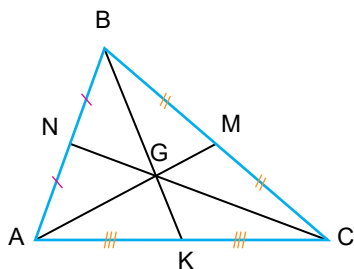
ამოხსნა:

$$P_{BMC} = BC + BM + MC$$

$$P_{ABM} = AB + BM + AM$$

$$\text{რადგან } MC = AM, P_{BMC} - P_{ABM} = BC - AB = 2 \text{ (სმ).}$$

პასუხი: BMC სამკუთხედის პერიმეტრი მეტია ABM სამკუთხედის პერიმეტრზე 2 სანტიმეტრით.



სახაზავის დახმარებით დახაზეთ ABC სამკუთხედი და გაავლეთ მისი AM, BK და CN მედიანები. მათი გადაკვეთის წერტილს უწოდეთ G. გაზომეთ AG და GM მონაკვეთები. შემდეგ გაზომეთ BG და GK, ასევე CG და GN. რას ამჩნევთ? რა კანონზომიერება მეორდება ყველა მედიანაზე?

თუ გაზომვები სწორად შეასრულეთ, დაინახავთ, რომ

სამკუთხედის მედიანები გადაკვეთის წერტილით იყოფა შეფარდებით 2:1, წვეროს მხრიდან.

(ამ წინადადებას მოგვიანებით დავამტკიცებთ)



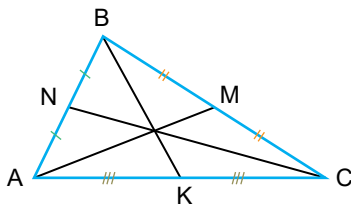
1. რა ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც სამკუთხედის წვეროს მისი მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილთან აერთებს?
2. როგორი შეფარდებით ყოფს მედიანების გადაკვეთის წერტილი თითოეულ მედიანას?



სავარჯიშოები

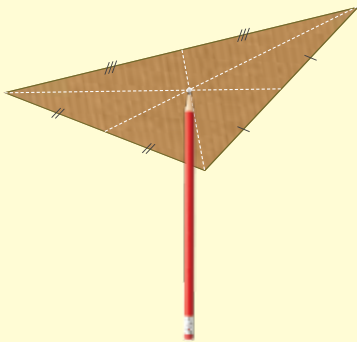
1. სახაზავის დახმარებით დახაზეთ სამკუთხედი და გაავლეთ მისი რომელიმე ერთი მედიანა.
2. სახაზავის დახმარებით დახაზეთ სამკუთხედი და გაავლეთ მისი სამივე მედიანა.
3. სახაზავის დახმარებით დახაზეთ ტოლფერდა სამკუთხედი. ფერდებისადმი გაავლეთ მედიანები. გაზომეთ და შეადარეთ მათი ზომები ერთმანეთს.

4. უჯრიან ფურცელზე სახაზავის დახმარებით დახაზეთ მართკუთხა სამკუთხედი. კათეტების სიგრძეებად აიღეთ 6 სმ და 8 სმ. მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზისადმი გაავლეთ მედიანა. სახაზავის დახმარებით გაზომეთ მედიანის სიგრძე. ასევე დაადგინეთ, რა სიგრძის მონაკვეთებად გაიჭრა ჰიპოტენუზა?
5. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:5:7, ხოლო მისი პერიმეტრი 48 სმ-ია, რა ნაწილებად დაყოფს სამკუთხედის გვერდებს ამ სამკუთხედის მედიანები?
6. ABC სამკუთხედში გავლებულია BD მედიანა. $AD = 5$. იპოვეთ AC გვერდის სიგრძე.
7. ABC სამკუთხედში $AB=7$ სმ, $AC=9$ სმ. A წვეროდან გავლებული AD მედიანა 7 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ABD სამკუთხედის პერიმეტრი 18 სმ-ია.



8. სამკუთხედში გავლებულია სამივე მედიანა (იხილეთ ნახაზი) $AK=2$ სმ, $BM=3$ სმ, $AN=1,5$ სმ. იპოვეთ $P_{\triangle ABC}$.

გეომეტრია ცხოვრებაში



გამოჭერთ მუყაოს ფურცლისგან სამკუთხედი. შეეცადეთ, ამ სამკუთხედის ფანქრის წვეროზე ისე დადებთ, რომ ის გაჩერდეს, არ გადაიხაროს, ანუ წონასწორობაში დარჩეს.

თუ გაავლებთ თქვენს სამკუთხედში მედიანებს, აღმოაჩენთ, რომ საძიებელი წერტილი მედიანების გადაკვეთის წერტილია.



ამ ფაქტს უკეთესად დაინახავთ, თუ მუყაოს სამკუთხედს ჩამოკიდებთ ძაფზე, რომელიც სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილში იქნება დამაგრებული.

ასეთ განსაკუთრებულ წერტილს, რომელშიც თითქოს ფიგურის მთელი „სიმძიმე“ იყრის თავს, **სიმძიმის ცენტრი** ეწოდება.

სიმძიმის ცენტრის სწორად განსაზღვრას არსებითი მნიშვნელობა აქვს არქიტექტორებისთვის, მშენებლებისთვის მყარი ხიდებისა და სხვადასხვა შენობის ასაგებად, ასევე მანქანათმშენებლობაში მყარი მანქანების შესაქმნელად, სპორტსმენებისთვის – მოძრაობის ბალანსის დასარეგულირებლად.

ანუ ერთი პატარა წერტილი რეალურ ცხოვრებაში ძალიან მნიშვნელოვან როლს თამაშობს.



რას შეძლებთ:

- სამკუთხედში მედიანების გატარებას, ტოლი მონაკვეთების მონიშვნას და ყოველივე ამის გამოყენებას ამოცანების ამოხსნისას.

6. სამკუთხედის ბისექტრისა



მიზანი:

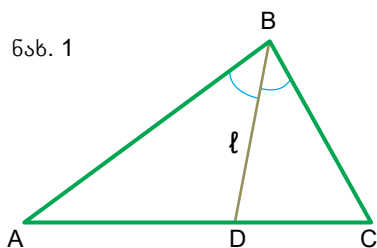
- განვმარტოთ სამკუთხედის ბისექტრისა.



წვეულების ბოლოს მაგიდაზე პიცის მესამედი დარჩა. ორმა მეგობარმა მოინდომა ამ პიცის ერთმანეთში თანაბრად გაყოფა. როგორ უნდა გაჭრან მათ პიცა, რომ თითოეულს თანაბრად შეხვდეს?

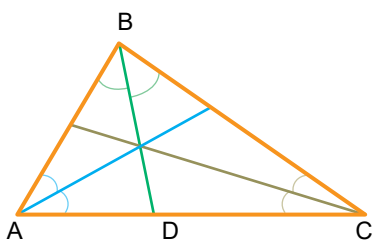
ჩვენ ვიცით, რომ კუთხის ბისექტრისა კუთხეს ორ ტოლ ნაწილად ყოფს, სამკუთხედს სამი კუთხე აქვს, შეგვიძლია სამივე კუთხის ბისექტრისა გავატაროთ.

ნახ. 1



სამკუთხედის მოცემული წვეროდან გავლებული ბისექტრისა ეწოდება სამკუთხედის კუთხის ბისექტრისის მონაკვეთს, რომელიც მოქცეულია სამკუთხედის შიგნით (ნახ. 1).

ბისექტრისა აღვნიშნოთ — l ასოთი (B წვეროდან გავლებული ბისექტრისა — l_b -თი).



ნახ. 2

ნებისმიერ სამკუთხედში სამივე ბისექტრისა ერთ წერტილში იკვეთება (ნახ. 2).

(ამ თვისებასაც მოგვიანებით დავამტკიცებთ)

შეჯამება:

- ის ფაქტი, რომ BD მონაკვეთი ABC კუთხის ბისექტრისაა, მოცემულობაში ასე ჩაიწერება $\angle ABD = \angle DBC$ და მოინიშნება ისე, როგორც ნახაზ 1-ზეა ნაჩვენები.



1. როგორ მონაკვეთს ეწოდება სამკუთხედის ბისექტრისა?
2. შეიძლება თუ არა ABC სამკუთხედის A კუთხის ბისექტრისა AB ან AC გვერდთან ბლაგვ კუთხეს ადგენდეს? მართ კუთხეს? პასუხი ახსენით.

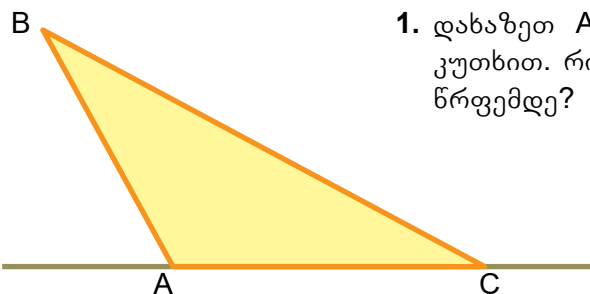


სავარჯიშოები

1. ABC სამკუთხედში გავლებულია BK ბისექტრისა. $\angle ABK=25^\circ$. იპოვეთ $\angle ABC$.
2. ABC სამკუთხედში გავლებულია AN და BP ბისექტრისები. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ $\angle BAN=25^\circ$ და $\angle CBP=30^\circ$.
3. რამდენ გრადუსიან კუთხეებს ქმნის მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის ბისექტრისა კათეტებთან?
4. ABC სამკუთხედში $\angle ABC=80^\circ$ და $\angle ACB=42^\circ$. BD ბისექტრისაა. იპოვეთ ADB კუთხის გრადუსული ზომა.
5. ABC სამკუთხედში $\angle ABC=36^\circ$ და $\angle ACB=72^\circ$. AM ბისექტრისაა. იპოვეთ ABM და AMC სამკუთხედების კუთხეთა გრადუსული ზომები.
6. ABC სამკუთხედში $\angle CAB=64^\circ$ და $\angle ACB=52^\circ$. CT და AD ბისექტრისები იკვეთება O წერტილზე. იპოვეთ AOC კუთხის გრადუსული ზომა.



მოვემზადოთ შემდეგი გაკვეთილისთვის



1. დახაზეთ ABC ბლაგვკუთხა სამკუთხედი A ბლაგვი კუთხით. როგორ გავზომოთ მანძილი B წვეროდან AC წრფემდე?



რას შეძლებთ:

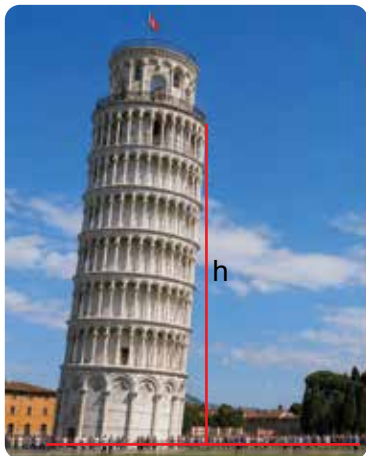
- სამკუთხედში ბისექტრისების გატარებას, ტოლი კუთხეების მონიშვნას და ყოველივე ამის გამოყენებას ამოცანების ამოხსნისას.

7. სამკუთხედის სიმაღლე



მიზანი:

- სამკუთხედის სიმაღლის განმარტება და იმის ჩვენება, თუ როგორი მდებარეობა აქვს სიმაღლეს სხვადასხვა სამკუთხედისთვის.

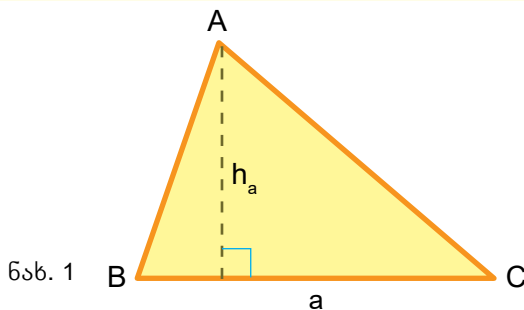


სიმაღლე აღვნიშნოთ h ასოთი (a გვერდისადმი გავლებული სიმაღლე h_a).

თქვენი აზრით, როგორ უნდა გაიზომოს პიზის კოშკის სიმაღლე?

განვმარტოთ სამკუთხედისთვის კიდევ ერთი, ძალიან საინტერესო, მონაკვეთი – **სიმაღლე**.

სამკუთხედის წვეროდან მის მოპირდაპირე გვერდის შემცველ წრფეზე დაშვებულ მართობს **სამკუთხედის სიმაღლე** ეწოდება (ნახ. 1).



ნახ. 1



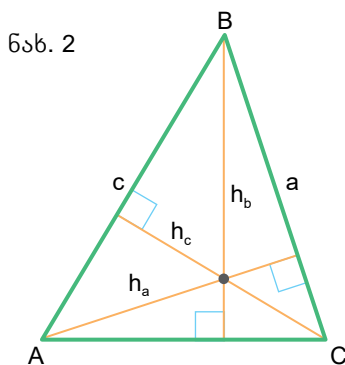
იცოდით, რომ

მშენებლებს ხშირად უწევთ წერტილიდან კედლამდე ან მიწამდე უმოკლესი მანძილის განსაზღვრა. ასეთ შემთხვევებში ისინი სწორედ სიმაღლის ცნებას იყენებენ, რადგან სიმაღლე უმოკლეს მანძილს გვიჩვენებს.

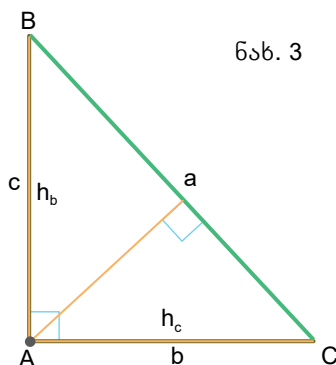
განვიხილოთ, როგორი მდებარეობა ექნება სიმაღლეს სხვადასხვა ტიპის სამკუთხედებში.

დახაზეთ მახვილკუთხა სამკუთხედი და მართკუთხა სახაზავის საშუალებით გაავლეთ სამივე სიმაღლე (ნახ. 2). დახაზეთ მართკუთხა სამკუთხედი (ნახ. 3).

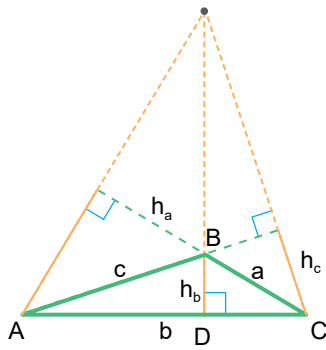
რას წარმოადგენს მართი კუთხის შემცველი გვერდებზე დაშვებული სიმაღლეები?



ნახ. 2



ნახ. 3



ნახ. 1

დახაზეთ ბლაგვკუთხა სამკუთხედი. მართკუთხა სახაზავის საშუალებით შეეცადეთ სიმაღლეების დაშვება (ნახ. 1).

დააკვირდით, თუ სად მოხვდება მართობის ფუძე. გააკეთეთ შესაბამისი დასკვნა.

როგორც ხედავთ, ორი სიმაღლე სამკუთხედის გარეთ გავიდა, ისინი გვერდების შემცველ წრფეებზე დაშვებული მართობებია.

თუ ნახაზები სწორად შეასრულეთ, დაინახავთ, რომ სამივე შემთხვევაში სიმაღლეები (ან მათი გაგრძელებები) ერთ წერტილში გადაიკვეთა.

დავიჯეროთ, რომ, როგორც თქვენ მიერ აგებული სიმაღლეები,

ნებისმიერ სამკუთხედში სამივე სიმაღლე (ან მათი შემცველი წრფეები) ერთ წერტილში იკვეთება.

ამ წინადადების დამტკიცება კი მოგვიანებით ჩავატაროთ.

შეკითხვები:

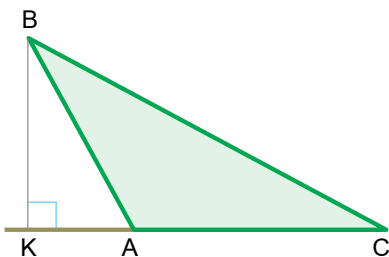
BD მონაკვეთი AC გვერდზე დაშვებული სიმაღლეა, მოცემულობაში ასე ჩაინერება $BD \perp AC$ და მოინიშნება ისე, როგორც ნახაზ 1-ზეა ნაჩვენები.



1. რას წარმოადგენს სამკუთხედის სიმაღლე?
2. სად მდებარეობს მართკუთხა სამკუთხედის სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი?
3. თუ სიმაღლეთა შემცველი წრფეები სამკუთხედის გარეთ იკვეთება, როგორია სამკუთხედი?

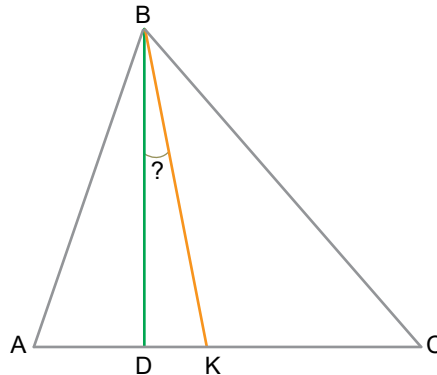


სავარჯიშოები

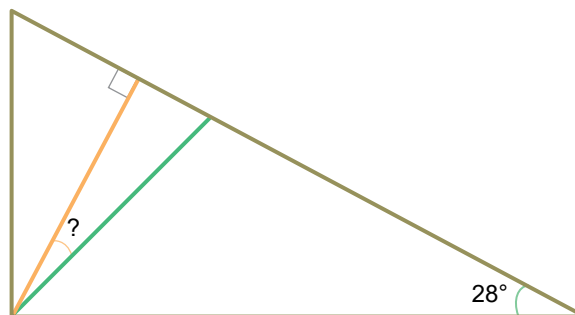


1. ნახაზზე წარმოდგენილია ABC სამკუთხედი და გავლებული BK სიმაღლე. როგორია ABC სამკუთხედი? კიდევ რომელი სიმაღლე გაივლება სამკუთხედის გარეთ? სამკუთხედის შიგნით?

2. ABC სამკუთხედში გავლებულია BM სიმაღლე. დასაზეთ შესაბამისი ნახაზი, თუ
 ა) სამკუთხედი მახვილკუთხაა; ბ) $\angle A = 90^\circ$; გ) $\angle A > 90^\circ$.
3. მოცემულია ABC სამკუთხედის ორი კუთხის გრადუსული ზომა. $\angle A = 48^\circ$ და $\angle C = 52^\circ$.
 გაავლეთ BD სიმაღლე და გამოიანგარიშეთ ABD და CBD კუთხეთა გრადუსული
 ზომები.
4. მოცემულია ABC სამკუთხედის ორი კუთხის გრადუსული ზომა. $\angle A = 71^\circ$ და $\angle C = 49^\circ$.
 გამოიანგარიშეთ BD სიმაღლესა და BK ბისექტრისას შორის კუთხის გრადუსული
 ზომა.



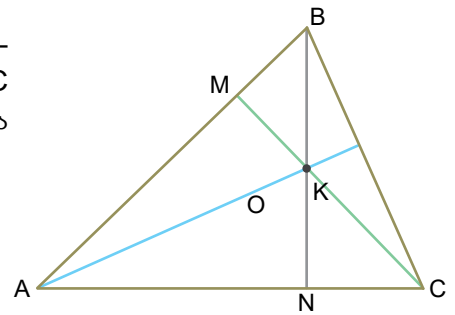
5. მოცემულია ABC სამკუთხედის ორი კუთხის გრადუსული ზომა. $\angle A = 32^\circ$ და $\angle B = 64^\circ$.
 გაავლეთ BN და AM სიმაღლეები და გამოიანგარიშეთ BAM და BAN სამკუთხედების
 კუთხეთა გრადუსული ზომები.
6. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი მახვილი კუთხეა 56° . დაადგინეთ მართი კუთხის
 წვეროდან გავლებულ სიმაღლესა და კათეტებს შორის კუთხეების გრადუსული
 ზომები.
7. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი მახვილი კუთხეა 28° . დაადგინეთ მართი კუთხის
 წვეროდან გავლებული სიმაღლესა და ბისექტრისას შორის კუთხის გრადუსული
 ზომა.



8. მოცემულია ABC სამკუთხედის ორი კუთხის გრადუსული ზომა. $\angle A = 60^\circ$ და $\angle B = 70^\circ$.
 გავლებული სამკუთხედის AK ბისექტრისა და BD სიმაღლე, რომლებიც იკვეთება O
 წერტილში. იპოვეთ AOB კუთხის გრადუსული ზომა.

9. შეადგინეთ 3-8 ამოცანებიდან ერთ-ერთის მსგავსი ამოცანა, კუთხეების გრადუსული ზომების შეცვლით, და ამოხსენით.

10. ABC სამკუთხედში გავლებული AK, BN და CM სიმაღლეები O წერტილში იკვეთება. იპოვეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები, თუ კუთხე $\angle BOM = 44^\circ$ და $\angle COK = 66^\circ$.



რას შეძლებთ:

- სამკუთხედის სიმაღლის აგებას სხვადასხვა ტიპის სამკუთხედებში.



ეს საინტერესოა



სამკუთხედები მხოლოდ რვეულში დახატული ფიგურები არ არის. ისინი თანამედროვე ტექნოლოგიებშიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ. მაგალითად, როდესაც ტელეფონში რუკას ვხსნით და ჩვენი ადგილმდებარეობა ჩნდება, მუშაობას იწყებს GPS სისტემა.

GPS რამდენიმე სატელიტის დახმარებით ადგენს, თუ რამდენად შორს ვართ თითოეული მათგანისგან, შემდეგ ამ მონაცემების მიხედვით ზუსტად ადგენს ჩვენს მდებარეობას.

როდესაც სამი სხვადასხვა სატელიტიდან მიღებული ინფორმაცია ერთმანეთს ედება, იქმნება **სამკუთხა კავშირები**, რომლებიც სისტემას ეხმარება ზუსტად განსაზღვროს, სად ვიმყოფებით. ამ მეთოდს **ტრიანგულაცია** ეწოდება.

ანუ, ყოველ ჯერზე, როცა ტელეფონი ჩვენი მდებარეობის დადგენას ცდილობს, პროცესში „სამკუთხედებიც მუშაობენ“.



პროექტი • მოამზადეთ პროექტი: „სამკუთხედები ჩვენს გარშემო“.

პროექტის მიზანია, აღმოაჩინოთ, სად გამოიყენება სამკუთხედები რეალურ ცხოვრებაში.

დავალება: გადაიღეთ 10-15 ფოტო (ხიდეები, სახურავები, საგზაო ნიშნები, ველოსიპედები, შენობები...), სადაც ჩანს სამკუთხედები. თითოეულ ფოტოზე მიუთითეთ სამკუთხედების ტიპი.

- რატომ გამოიყენეს სწორედ სამკუთხედი ამ კონსტრუქციაში?
- შედეგები წარმოადგინეთ პოსტერის ან PowerPoint-ის ფაილის სახით.

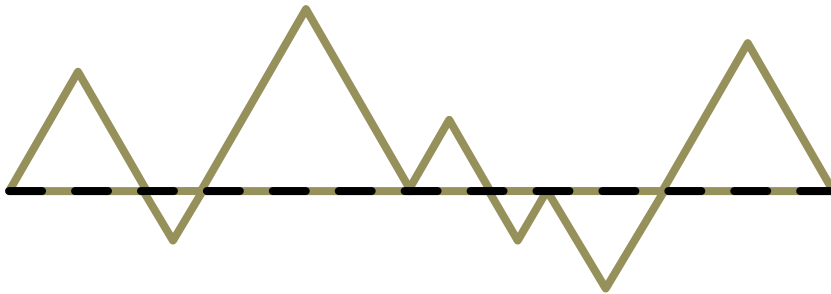


მოცემული თავის დამატებითი ელექტრონული რესურსები იხილეთ QR-კოდზე.

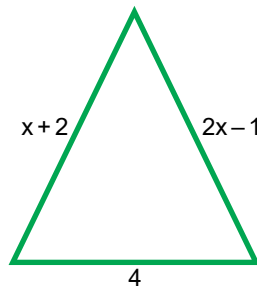


IV თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. სამკუთხედის პირველი გვერდის სიგრძე 8 სმ-ით მეტია მეორე გვერდის სიგრძეზე, მაგრამ 8 სმ-ით ნაკლებია მესამეზე. რამდენჯერ მეტია სამკუთხედის პერიმეტრი პირველი გვერდის სიგრძეზე?
2. პირველი სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები ხუთჯერ დიდია, ვიდრე მეორე სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები. რამდენჯერ მეტი ექნება პერიმეტრი პირველ სამკუთხედს, ვიდრე მეორეს?
3. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის პერიმეტრია 24 სმ. AB და CB გვერდებზე, შესაბამისად, აღნიშნეს M და N წერტილები ისე, რომ MBN სამკუთხედი ტოლგვერდაა და $AMNC$ ოთხკუთხედის პერიმეტრია 23,9 სმ. იპოვეთ MBN სამკუთხედის პერიმეტრი.
4. გაარკვიეთ ნახაზზე რამდენი სანტიმეტრია გამუქებული ტეხილის სიგრძე, თუ ცნობილია რომ ზოლიანი მონაკვეთის სიგრძე 11 სმ-ია და ყველა სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

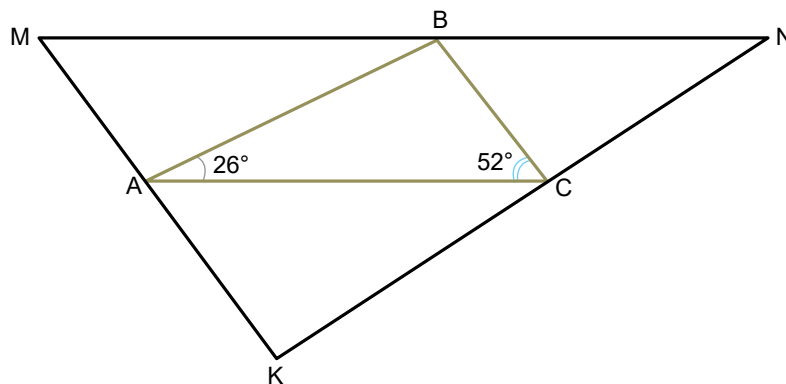


5. სურათზე წარმოდგენილია ტოლფერდა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები მეტრებში. რას შეიძლება უდრიდეს აღნიშნული სამკუთხედის პერიმეტრი?



6. $ABCD$ ოთხკუთხედის პერიმეტრია 66 სმ, ხოლო ABD და BCD სამკუთხედების, შესაბამისად, 60 სმ და 56 სმ. რას უდრის BD დიაგონალის სიგრძე?
7. ABC სამკუთხედში ცნობილია, რომ $AB:BC=2:3$ და $BC:AC=6:7$. იპოვეთ სამკუთხედის უმცირესი გვერდის ზომა, თუ მისი პერიმეტრია 51 სმ.
8. სამკუთხედის ერთი კუთხე მეორის 50%-ია, ხოლო მესამეზე 1,5-ჯერ ნაკლებია. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

9. სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხის გრადუსული ზომა უდრის დანარჩენი ორი კუთხის გრადუსულ ზომათა საშუალო არითმეტიკულს (ანუ, მათი ჯამის ნახევარს). იპოვეთ აღნიშნული სამკუთხედის რომელიმე ერთი კუთხის სიდიდე.
10. სამკუთხედში ყველა კუთხის გრადუსული ზომა გამოისახება განსხვავებული ნატურალური რიცხვებით. რა უმცირესი რიცხვის ტოლი შეიძლება იყოს ამ კუთხეებიდან უდიდესის და უმცირესის ჯამი?
11. ABC სამკუთხედში AN , BK და CM მედიანები გაავლეს. ცნობილია, რომ $AM=2$ სმ, $BN=3$ სმ და $CK=4$ სმ. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.
12. სამკუთხედის სამივე კუთხის გრადუსული ზომა განსხვავებული ნატურალური რიცხვით გამოისახება. ამასთან, ნებისმიერი ორის გრადუსულ ზომათა ჯამი უნაშთოდ იყოფა მესამეზე. იპოვეთ ეს კუთხეები.
13. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია a, b და c . ასევე, ცნობილია, რომ სამართლიანია ტოლობა $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$. აჩვენეთ, რომ ეს სამკუთხედი ტოლფერდაა.
14. შეიძლება თუ არა, სამკუთხედის გარე კუთხეებიდან, რომელიმე ერთის გრადუსული ზომა აღემატებოდეს სხვა რომელიმე ორის გრადუსულ ზომათა ჯამს?
15. შეიძლება თუ არა, მახვილკუთხა სამკუთხედის, რომელიმე ორი გარე კუთხე წარმოადგენდეს სხვა სამკუთხედის ორ შიგა კუთხეს?
16. ABC სამკუთხედის წვეროებზე მოპირდაპირე გვერდების პარალელურად გავლებული წრფეები იკვეთებიან M , N და K წერტილებში. იპოვეთ MNK სამკუთხედის კუთხეები, თუ BAC კუთხე 26° -ია, BCA კუთხე 52° .



17. ABC სამკუთხედში გაავლეს BM მედიანა და ABM სამკუთხედში გაავლეს ML მედიანა. ცნობილია, რომ $BC=11$ სმ. რამდენი სმ-ით მეტია $CMLB$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი MAL სამკუთხედის პერიმეტრზე?
18. ABC სამკუთხედის AD მედიანის სიგრძეა 15 სმ, ხოლო BK მედიანის სიგრძეა 18 სმ. AC გვერდის სიგრძეა 16 სმ. მედიანების გადაკვეთის წერტილია G . იპოვეთ AGK სამკუთხედის პერიმეტრი.

19. ABC სამკუთხედში $\angle ABC = 112^\circ$. CT და AD ბისექტრისები იკვეთება O წერტილში. იპოვეთ $\angle AOC$ კუთხის გრადუსული ზომა.
20. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში $\angle C = 82^\circ$. გაავლეთ BN და AM სიმაღლეები და გამოიანგარიშეთ BKM და MKN კუთხეთა გრადუსული ზომები, თუ K წერტილი სიმაღლების გადაკვეთის წერტილია.
21. ABC სამკუთხედის CT და AD ბისექტრისები იკვეთება O წერტილში. იპოვეთ $\angle ABC$ კუთხის გრადუსული ზომა, თუ ცნობილია, რომ $\angle COD = 70^\circ$.
22. ABC სამკუთხედში გაავლეს AM მედიანა. დაადგინეთ, რამდენი სანტიმეტრით მეტია AMB სამკუთხედის პერიმეტრი AMC სამკუთხედის პერიმეტრზე, თუ ცნობილია, რომ $AB - AC = 5$ სმ.
23. ABC სამკუთხედში გაავლეს AD ბისექტრისა. E წერტილი AB გვერდზე ისეა შერჩეული, რომ DE და AC წრფეები აღმოჩნდა პარალელური. დაადგინეთ $\angle ADE$ კუთხის გრადუსული ზომა, თუ ცნობილია, რომ $\angle BAC = 78^\circ$.
24. ABC ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის სიგრძეა 15 სმ. ABC სამკუთხედის ერთ-ერთი მედიანა ამ სამკუთხედს ჰყოფს ორ სამკუთხედად, რომელთა პერიმეტრების სხვაობაც 3 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფერდის სიგრძე.
25. ABC სამკუთხედის ბისექტრისები იკვეთება O წერტილში. იპოვეთ $\angle ABC$ კუთხის გრადუსული ზომა, თუ ცნობილია, რომ $\angle AOB = 110^\circ$ და $\angle COB = 130^\circ$.
26. ABC სამკუთხედში $\angle ABC = 80^\circ$. ცნობილია, რომ სამკუთხედის B წვეროსთან მდებარე გარე კუთხის ბისექტრისის შემცველი წრფე AC წრფის პარალელურია. იპოვეთ $\angle ACB$ -ს გრადუსული ზომა.
27. ABC სამკუთხედის AM ბისექტრისა და BH სიმაღლე იკვეთება K წერტილში. იპოვეთ $\angle AKH$ კუთხის გრადუსული ზომა, თუ ცნობილია, რომ $\angle ABH = 22^\circ$.
28. ABC მართკუთხა სამკუთხედის მართი B კუთხის წვეროდან გაავლეს სამკუთხედის BM სიმაღლე. ცნობილია, რომ $\angle MBC - \angle MBA = 12^\circ$. იპოვეთ ABC სამკუთხედის A და C მახვილი კუთხეების გრადუსული ზომები.
29. მახვილკუთხა ABC სამკუთხედის AM და BH სიმაღლეები იკვეთება O წერტილში. იპოვეთ $\angle OAB$ და $\angle OBA$ კუთხეების გრადუსულ ზომათა ჯამი, თუ ცნობილია, რომ $\angle ACB = 78^\circ$.
30. ABC სამკუთხედში $\angle BAC$ და $\angle BCA$ კუთხეები ტოლია. გაატარეს AM ბისექტრისა. ცნობილია, რომ $\angle AMB$ კუთხის გრადუსული ზომაა 108° . იპოვეთ ABC კუთხის გრადუსული ზომა.



IV თავის მოკლე მიმოხილვა

- სამკუთხედების კლასიფიკაცია გვერდების მიხედვით – ტოლგვერდა სამკუთხედი; ტოლფერდა სამკუთხედი, სხვადასხვაგვერდა სამკუთხედი.
- სამკუთხედების კლასიფიკაცია კუთხეების მიხედვით – მახვილკუთხა სამკუთხედი, მართკუთხა სამკუთხედი, ბლაგვეკუთხა სამკუთხედი.
- სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180° -ია.
- სამკუთხედის შიგა კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს სამკუთხედის გარე კუთხე ეწოდება.
- სამკუთხედის გარე კუთხე სამკუთხედის შიგა, არამოსაზღვრე კუთხეების ჯამის ტოლია.
- მონაკვეთს, რომელიც სამკუთხედის წვეროს მის მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილთან აერთებს, სამკუთხედის მედიანა ეწოდება.
- სამკუთხედის სამივე მედიანა, ერთ წერტილში იკვეთება.
- სამკუთხედის შიგა კუთხის ბისექტრისის მონაკვეთს, რომელიც სამკუთხედის შიგნით არის მოქცეული, სამკუთხედის ბისექტრისა ეწოდება.
- სამკუთხედის სამივე ბისექტრისა ერთ წერტილში იკვეთება.
- სამკუთხედის წვეროდან მის მოპირდაპირე გვერდის შემცველ წრფეზე დაშვებულ მართობს სამკუთხედის სიმაღლე ეწოდება.
- სამკუთხედის სამივე სიმაღლე ან მათი გაგრძელებები ერთ წერტილში იკვეთება.

I-IV თავების სავარჯიშოთა პასუხები

თავი I:

- 1. წილადები და მათზე მოქმედებები:** 1. ა) $\frac{10}{12}$; ბ) $\frac{15}{18}$; გ) $\frac{20}{24}$; დ) $\frac{80}{96}$. 2. გ. 3. ა) $\frac{7}{2}$; ბ) $\frac{8}{3}$; გ) $\frac{14}{9}$; დ) $\frac{30}{11}$. 4. ა) $6\frac{1}{2}$; ბ) $3\frac{5}{7}$; გ) $4\frac{7}{12}$; დ) $11\frac{1}{9}$. 5. ა) $>$; ბ) $>$; გ) $<$; დ) $<$. 6. ა) $1\frac{2}{45}$; ბ) $5\frac{7}{36}$; გ) $22\frac{1}{12}$; დ) 3; ე) $\frac{2}{7}$; ვ) $3\frac{1}{18}$; ზ) $6\frac{17}{40}$; თ) $1\frac{1}{4}$. 7. $6\frac{1}{2}$. 8. 41 კმ. 9. $\frac{13}{15}$ ტ. 2. ათწილადები და მათზე მოქმედებები: 1. ა) 232,7; ბ) 12327; გ) 13827; დ) 267000; ე) 2,757; ვ) 1,56745; ზ) 0,019083; თ) 0,00030002. 2. ა) 5,91; ბ) 12,299; გ) 9,65; დ) 20; ე) 6,72; ვ) 7,888; ზ) 3,45; თ) 3,8. 3. ა) 11,44; ბ) 7; გ) 2; დ) 8,44. 4. 36 კმ; 6 კმ; 20 მ. 5. 2 საათში. 6. გიორგის 115ლ 20თ და დათოს 125ლ 55თ. 3. ჩვეულებრივი წილადის გადაქცევა ათწილადად: 1. ა) 0,6; ბ) 0,25; გ) 0,75; დ) 0,34. 2. ა) 0,16; ბ) 0,168; გ) 0,6; დ) 0,95. 3. 8კგ. 4. 2სთ და 55წთ. 5. 330,5 კგ. 6. ა) 6,5; ბ) 2,31; გ) 14,8; დ) 0. 4. რიცხვითი გამოსახულება, ასოითი გამოსახულება: 1. 7; 4; 1; 6,6. 2. ა) 5; ბ) 4,2; გ) $2\frac{1}{9}$; დ) 20,5. 3. ა) $(a+b):4$; ბ) $a+2b$; გ) a^2-3b ; დ) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. 4. ა) 5a; ბ) 15b; გ) 1,1x; დ) mn; ე) $1,3a+3b$; ვ) $9x+12,2y$; ზ) $2,4m+2,7n$; თ) $mn-4,4x$. 5. ა) $3k-2$; ბ) $2k+1,5$. 6. ა) 16,6; ბ) 9,4. 7. $4a^2+2ab+2ac$. 5. ამოცანები წილადებზე: 1. ა) 120; ბ) 160; გ) 100; დ) 190. 2. ა) 20; ბ) 40; გ) 5,2; დ) $\frac{10}{27}$. 3. ა) $\frac{1}{6}$; ბ) $\frac{11}{30}$; გ) $\frac{27}{50}$; დ) $\frac{41}{50}$. 4. 32 მოსწავლე; 5. $\frac{2}{5}$ ნაწილი. 6. 1800 ერთ. 7. თამარი. 8. ორივე დღეს ერთნაირად. 9. 55 გვერდი. 10. 41,6 გრამით; 125 გრამი.
- 2.** 1. ა) {1, 3, 5, 15}; ბ) {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}; გ) {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}; დ) {23, 46, 69, 92}; 2. ა) ჭ.; ბ) მც.; გ) ჭ.; დ) ჭ.; ე) მც.; ვ) მცდ. 4. ა) 7 და 8; ბ) 3. 5. ა) 3; ბ) 6. 6. ა) 4; ბ) 1. 7. {13,27,41,55,69,83,97}. 8. თანაბარი რაოდენობის ამონერეს. 9. არა. 10. ა) 3,7; ბ) 2,1; გ) 70; დ) 2,1.
- 3.** 1. ა) {0; 2; 4; 7; 8; 19; 21; 40}; ბ) {0;19}. 2. ა) $\{5\frac{3}{7}\}$; ბ) {0; 3; 5,3; $5\frac{3}{7}$; 20; 198}; გ) $\emptyset$; დ) {0; 3; 5,3; $5\frac{3}{7}$; 20; 198}. 3. ა) სასრული; ბ) სასრული; გ) უსასრულო; დ) უსასრულო; 4. ორნიშნა 12-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე. 5. ა) მც.; ბ) მც.; გ) ჭ.; დ) მც. ე) მც.; ვ) მც. 6. ა) $<$; ბ) $\neq$; გ) $<$; დ) $\in$; ე) $\neq$; ვ) $<$; ზ) $<$. 7. ა) 2; ბ) 3; გ) 4; დ) 1. 8. 15. 9. ა) 8; ბ) 5. 10. 20 მოსწავლე. 11. 20 მოსწავლე. 12. 106; 226; 200. 13. 12. 14. ა) 4,6; ბ) 18,5. 15. ა) ლუწი; ბ) ლუწი; გ) კენტი; დ) კენტი.
- 4.** 1. ა) აცოცდა ზემოთ 5სმ-ით; ბ) ჩამოცოცდა ქვემოთ 5 სმ-ით. 2. ა) -2; ბ) -15; გ) 5,3; დ) $-\frac{2}{3}$; ე) 53; ვ) $-2\frac{7}{9}$. 6. ა) A(-3); B(1); C(-4); ბ) A(-4); B(-2). 7. -4°C . 8. ა) ჭ.; ბ) ჭ.; გ) ჭ.; დ) მც.; ე) მც.; ვ) ჭ. ზ) ჭ.; თ) ჭ. 9. 15,7.
- 5. რაციონალური რიცხვების შედარება:** 1. ა) $<$ ბ) $>$ გ) $<$ დ) $>$. 2. ა) A; ბ) M; გ) F. 3. ა) B; ბ) M; გ) F. 6. ა) -3; -2,5; $-\frac{1}{5}$; 0; 2; ბ) -10; -4,2; -1,5; 3,4. 7. ა) $3\frac{5}{9}$; 0; -2; $-9\frac{2}{5}$; -18; ბ) 2; $\frac{4}{5}$; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{5}{4}$; -6,2. 8. ა) 3, 4, 5, 6; ბ) -5, -4, -3, -2, -1. 9. ა) ერთი; ბ) ხუთი; გ) ოცი. 10. ა) 3; ბ) $\frac{5}{4}$; გ) -3,6; დ) 3,99; ე) -20,8. 11. ა) -9, -11, -13; ბ) -23, -28, -33; გ) -2,5; -3; 12. ა) მც.;

ბ) ჟ.; გ) მც.; დ) ჟ.; ე) ჟ.; ვ) მც. **13.** ა) 6; 7; 8; 9; ბ) ნებისმიერი ციფრი; გ) 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. **14.** ა) 70-დან 120-ის ჩათვლით; ბ) 0-დან 50-ის ჩათვლით. **15.** დიახ, 0.

6. **1.** 10; 4; 2; 3; 0; 0,9; 12; $-3\frac{3}{7}$. **2.** ა) $|a|$; ბ) $|b|$; გ) $|a|$; დ) ტოლია. **3.** ა) 9; ბ) 9; გ) 6; დ) 8; ე) 6,4; ვ) 3; ზ) 0; თ) 0,75. **6.** დ. **7.** ა) 12; ბ) 50. **8.** ა) $-0,4$; 3; ბ) -5 ; 11. **9.** ა) -2 ან 2; ბ) -3 ან 5; გ) -7 ან 3; დ) არ აქვს ამონახსნი ე) -6 ვ) არ აქვს ამონახსნი **10.** 0; 0,5. **11.** 3,2; 6. **12.** მეორე. **13.** კი. **14.** ა) მც.; ბ) ჟ.; გ) მც.; დ) მც.; ე) ჟ. **15.** 45. **16.** 6,2.

7. **1.** ა) -15 ; ბ) 14; გ) 10; დ) 0; ე) 2; ვ) 1; ზ) 7; თ) -100 . **2.** ა) -5 ; ბ) $-9,1$; გ) $-10,5$; დ) $-21,7$; ე) $-12,8$; ვ) $-97,69$; ზ) -1 ; თ) $-286,15$. **3.** ა) $\frac{7}{40}$; ბ) $-4\frac{5}{36}$; გ) $-7\frac{17}{18}$; დ) $2\frac{7}{20}$; ე) $7\frac{27}{44}$; ვ) $-8\frac{7}{40}$; ზ) $-22\frac{19}{20}$; თ) $-8\frac{1}{15}$; ი) $-12\frac{12}{35}$; კ) $2\frac{12}{17}$. **4.** 2; -3 ; 1; $-6,5$; $-11,4$; 25; -20 ; -51 . **6.** ა) $-9,9$; ბ) $-2,5$; გ) 2,15; **8.** 3. **9.** თანაბარია. **10.** ა) 4; 0; ბ) 4,4; 0,2; გ) 4; 4. **11.** ა) $9=4+5$; ბ) $-3=-2+(-1)$; გ) $-9=-5+(-4)$; დ) $-45=-23+(-22)$. **12.** 0 ქულა. **13.** $-268,93^{\circ}\text{C}$. **14.** დიახ, თუ შესაკრებები უარყოფითებია. **15.** 388 მ. **16.** ა) 31,5; ბ) -2 . **17.** 30.

8. **2.** ა) $-6,7$; ბ) $-5,5$; გ) 3,1; დ) 5,5; ე) $-0,45$; ვ) 0. **3.** ა) $\frac{2}{7}$; ბ) -1 ; გ) $-3,8$; დ) $-1\frac{7}{8}$. **4.** ა) 3; ბ) $-3,4$; გ) 3; დ) $\frac{4}{15}$. **5.** უმცირესი $-BC$; უდიდესი $-CD$. **6.** ა) 1; ბ) -4 . **7.** -9247 ; **8.** ა) -10 , -13 ; ბ) -7 , $-8,5$. **9.** 3წთ; 2წთ. **10.** $1122,23^{\circ}\text{C}$. **11.** ა) -6° ; ბ) -18° . **12.** -173° ; **13.** 86 მ. **14.** ა) -4 , -1 ; ბ) 0,4, 2. **15.** ა) ნებისმიერი $x \leq 0$; ბ) ნებისმიერი $x > 0$. **16.** ორი. **17.** A(-1); B(7).

9. **1.** ა) 12; ბ) 3 გ) -15 ; დ) -48 ; ე) -77 ; ვ) -152 ; ზ) -3 ; თ) 5; ი) 5; კ) -5 ; ლ) 0; მ) 0. **2.** ა) $-6,5$; ბ) $-7,8$; გ) 1,6; დ) $-\frac{3}{23}$; ე) -7 ; ვ) -2 ; ზ) $-\frac{5}{6}$; თ) 0; ი) 64; **3.** ა) $\frac{12}{-3}$; ბ) $\frac{-20}{5}$; გ) $\frac{48}{-12}$; დ) $\frac{-460}{115}$. **4.** ა) 9; ბ) 1,44; გ) $\frac{25}{81}$; დ) $\frac{49}{25}$; ე) -8 ; ვ) $\frac{16}{625}$. **5.** ა) 18; ბ) 28; გ) -133 ; დ) -4 ; ე) -13 ; ვ) 7. **6.** ა) 24; ბ) 9; გ) -24 ; დ) 2; ე) 1; ვ) -5 . **7.** ა) 17; ბ) 0. **8.** ა) 1, 2, 3; ბ) 1, 2; გ) 1, 2, 3; დ) 1, 2, 3, 4, 5, 6. **9.** ა) -9 ; ბ) $-13,5$; გ) 16; დ) 61. **10.** ა) 5; ბ) არცერთი. **11.** ა) -16 ; ბ) 3,1; გ) $-0,1$. **12.** ა) $-\frac{1}{40}$; ბ) 2; გ) 0,3; დ) $-0,2$. **13.** $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{-b}$; $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$. **14.** შესაძლებელია. **15.** $(6x+30)$ თეთრი. **16.** ა) მათემატიკის მოყვარული ბიჭები; ბ) $\emptyset$; გ) გოგონები, რომლებსაც უყვართ მათემატიკა და ლიტერატურა; დ) ბიჭები, რომლებსაც უყვართ მათემატიკა და დადიან ფეხბურთზე.

10. **1.** ა) 23; ბ) -50 . **2.** ა) -296 ; ბ) -236 ; გ) 108; დ) 532. **3.** ა) $6x$; ბ) $-6a$; გ) $35m$; დ) $63ax$; ე) $45mn$; ვ) $80a^2$; **4.** ა) 14; ბ) 3,7; გ) 1,5; დ) 1,1. **5.** ა) $4a+6b$; ბ) $-3m-36n$; გ) $8m-3$; დ) $0,9xy-0,6$. **6.** ა) $-6x-5$; ბ) $-24a-21$; გ) $17mn+2$; დ) $16p+15$. **7.** ა) $7\frac{7}{15}$; ბ) $-12,5$ გ) -7 ; დ) -8 . **8.** ა) 12; ბ) 120; გ) 90; დ) 4,8; **9.** ა) $2a+9$, -3 ; ბ) $a+4,2$, $3a+1,8$; გ) $-3a+9,5$, $-1,6a-19,5$; დ) $4a-3$, $-2a-11$; **10.** ა) $m+4$; ბ) $-4m+1,5$; გ) $-3,6m-7$; დ) 30; **10.** ა) 19; ბ) 78; გ) 51; დ) 38. **12.** ა) $-16x-27$; ბ) $3-6x$; გ) $2,1x+12$. **13.** ა) 19; ბ) 78; გ) -51 ; დ) 38. **14.** ა) $2x+3y-3$; ბ) $9a+3b-8c+2$. **15.** ა) $-4,5$; ბ) 7; გ) $\frac{53}{80}$; დ) $-10,1$. **16.** ა) 10; ბ) 23; გ) 14; დ) 1000000. **17.** გ. **18.** ა) $p=0$, 12; ბ) ა) $p=2,7$, 1,1. **19.** ა) კი; ბ) არა; გ) არა; დ) არა.

I თავის დამატებითი სავარჯიშოები: **1.** ე) $17\frac{14}{15}$; ვ) $3\frac{11}{13}$; ზ) 8,5; თ) 2. **2.** ა) 3; ბ) 50. **3.** ე) 1,326; თ) 3,4. **4.** ა) $1\frac{2}{3}$; ბ) $97\frac{1}{3}$. **5.** ა) 4,5; ბ) 0,3. **6.** ა) 5,4; გ) $3\frac{6}{7}$. **7.** $\frac{1}{k}$; $1-k$; k^2 . **8.** ა) 3;

6; 7; 2; 4; დ) 2,329; 27,379; 634,274; 74,124. **9.** ა) 120; ბ) 70. **10.** 43,95 კმ. **11.** $\frac{2m}{3}$. **12.** $n+11,5\%$. **13.** კი. **15.** 600 TB. **16.** 15. **17.** ა) {2; 5; 15; 20; 4}; {2; 15}. **18.** გ). **19.** ა) $\emptyset$; **20.** 24. **22.** დიახ. **24.** 60. **25.** ლევანი – 25, აკაკი – 20, არ ამონერეს – 60 რიცხვი. **26.** 4. **27.** ა) –384; ბ) 1 000 000; გ) 432; დ) 51. **28.** ა) –1,6; გ) 7,6. **29.** გ) $5m+1$. **30.** გ) 0,5; დ) –2. **32.** 6. **33.** ა) 2,2; ბ) –22; გ) $-\frac{4}{3}$; დ) –0,2; ე) –0,6; ვ) 1. **34.** გ) 6; –1; დ) ± 5 . **35.** ე) –3,5; ვ) $\frac{11}{36}$; ზ) 0; თ) –7,43; **36.** გ) $\emptyset$; დ) {–2; 0,3; 0; 12; 1; 18; 28}. **37.** –2; **38.** გ). **39.** 134; 136. **40.** ა) $-\frac{5}{7}$; ბ) 0,0048. **41.** ა) -1° ; 1° . **42.** ა) 5; ბ) 1. **43.** ა) –4; გ) –15. **44.** $-\frac{1}{8}$. **45.** გ) დადებითი; დ) უარყოფითი. **49.** გ) $2\frac{11}{30}$; ე) 2,2; ვ) –2; ზ) $4\frac{7}{30}$. **50.** 9989. **51.** ა) $-x$; $-\frac{1}{x}$; x ; x^2 ; გ) x ; x^2 ; $-x$; $-\frac{1}{x}$. **52.** ბ) $1\frac{1}{12}$. **53.** ა) M (1); M (7); ბ) M(–3,5); M(–1,7). **56.** სამი.

თავი II:

- 1.** 2. 4; **6.** გ. **9.** 6. **11.** ა) {6;8;10;...;34;36}; ბ) {8;12;16;...;36}; გ) {8;14;...;32}. **12.** ა) ქ.; ბ) მცდ.; გ) მცდ.; დ) ქ.
- 2.** 4. 1 ან 3. **5.** ა) 3; ბ) 4. **7.** ა) მცდ.; ბ) ქ.; გ) ქ.; დ) მცდ. **8.** ორ ნაწილად გაიყო. დამატებით სხივებს არ წარმოადგენენ. **10.** ა) ქ.; ბ) მცდ.; გ) ქ.; დ) ქ. **11.** ა) გაიზარდა 28-ით; ბ) არ შეიცვალა; გ) შემცირდა 2-ჯერ; დ) გაიზარდა 8-ჯერ; ე) შემცირდა 2-ჯერ; ვ) არ შეიცვალა.
- 3.** 1. 3. **2.** ა) 19 სმ; ბ) 6 სმ; გ) $(11-x)$ სმ. **3.** ა) 3,9 სმ; ბ) 6,2 სმ; **4.** 34 სმ; **5.** 7 სმ. **10.** ა) 4-ჯერ; ბ) 3-ჯერ; გ) $\frac{2}{3}$ ნაწილი; დ) $\frac{3}{4}$ ნაწილი; ე) 2:3. **11.** 75 სმ. **12.** 37; 74; 111. **13.** ა) ნაკლებია; ბ) ნაკლებია.
- 4.** 5. OM. **7.** CN და CM. **10.** 95° . **11.** ა) $\angle AOM = 75^\circ$; ბ) $\angle AOM = 56^\circ$ და $\angle BOM = 39^\circ$; გ) $\angle AOM = 66^\circ$ და $\angle BOM = 44^\circ$. **12.** ა) $\angle MOA = 52,5^\circ$ და $\angle AOK = 37,5^\circ$ ბ) $\angle MOA = 90^\circ$ და $\angle AOK = 30^\circ$; გ) $\angle MOA = 56^\circ$ და $\angle AOK = 24^\circ$. **13.** 180° ; 0° .
- 5.** 1. ა) 7; **2.** ა) ტოლი კუთხეებია; ბ) $\angle MOK = \angle KON = 42^\circ$. **3.** ა) $\angle AOC = 60^\circ$; ბ) $\angle COB = 60^\circ$; გ) ნაკლებია 60° -ით. **4.** ა) $\angle NOM = 38^\circ$; ბ) $\angle NOK = 76^\circ$. **5.** ა) $\angle AOC = 48^\circ$; ბ) $\angle AOD = 24^\circ$; გ) $\angle DOB = 72^\circ$. **6.** $\angle DOC = \angle AOB = 140^\circ$; $\angle DOK = \angle AOK = 90^\circ$; $\angle KOC = \angle KOB = 50^\circ$. **7.** $\angle BOD$ და $\angle AOE$. **8.** ბლაგვი. **9.** $\angle COD = 75^\circ$. **10.** $\angle EBF = 42^\circ$. **11.** $\angle BAD = \angle DAC = 40^\circ$.
- 6.** 2. 115° და 65° ; **3.** 135° და 45° . **4.** 94° . **5.** 20° . **6.** –1. **7.** 90° . **8.** ა) შეუძლებელია; ბ) შესაძლებელია; **9.** 760 მ. **10.** 3 მ.
- 7.** 2. ა) $157^\circ 48'$; ბ) 90° ; გ) $58^\circ 45'$. **3.** 71° ; 109° ; 71° . **4.** 180° . **5.** 70° . **6.** $\angle MOD = 80^\circ$. **8.** $\angle AOC = 110^\circ$, $\angle AOE = 120^\circ$, $\angle FOD = 110^\circ$, FC და BE წრფეებს შორის კუთხეა 50° . **9.** ა) 70° , 110° , 70° , 110° ; ბ) 71° , 109° , 71° , 109° ; გ) 36° , 144° , 36° , 144° . **10.** ა) არა; ბ) არა; გ) არა; დ) დიახ.
- 8.** 3. ა) 20° . **5.** $52,5^\circ$ და $37,5^\circ$. **6.** 45° . **7.** 100° . **8.** 44° . **9.** 1. **10.** 0 ან 1. **11.** 150° და 30° . **12.** 120° .

9. 2. 123° . **3.** არა. **4.** პარალელურია. **5.** პარალელურია. **6.** პარალელურია. **7.** ვერ დავადგენთ. **8.** არ გადაკვეთს. **9.** არის. **10.** 60° . **11.** 1799. **12.** 444 444 444. **13.** 11 პროექტს.

10. **1.** 78° , 102° , 180° . **2.** 105° და 75° . **3.** 35° და 35° . **4.** 50° , 50° , 130° . **5.** 140° და 40° . **6.** 22° . **7.** 80° და 80° . **8.** 37° და 143° . **9.** 43° . **10.** მით.: კუთხეთა ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილზე გაავლეთ მოცემული ორი პარალელური წრფის პარალელური წრფე. **11.** 50° .

II თავის დამატებითი სავარჯიშოები: **3.** მაქსიმუმ 7. **6.** 6 წრფე. **7.** 190. **8.** 5, 8, 10 ან 11. **9.** 2n. **10.** 1, 2 ან 3. **11.** 10 წრფე. **12.** ხუთი. **13.** ცხრა. **15.** 10. **16.** 0. **17.** ორი ან არც ერთი. **18.** 55 კმ/სთ-ით. **19.** 3 სმ. **20.** ა) 60° ; ბ) 75° . **21.** 32° . **22.** 15. **23.** 2 ან 3. **24.** 4. **25.** 30° , 40° , 70° ან 80° . **26.** 140° . **27.** 40° ან 80° . **28.** შესაძლებელია AK სხივი არ იყოს მოცემული BAC კუთხის ბისექტრისა. **29.** 80° . **32.** 112° . **33.** 180° . **34.** 126° . **35.** 72° . **37.** 20° . **39.** 65° ან 50° . **41.** 78° . **42.** 70° . **44.** 87° . **45.** 180° .

თავი III:

1. **1.** ა) 1 %; ბ) 7 %; გ) 6 %; დ) 16 %; ე) 53 %; ვ) 240 %; ზ) 162,5 %; თ) 390 %. **2.** ა) $1/20$; ბ) 1; გ) $1/5$; დ) $3/1000$; ე) $13/500$; ვ) $4/700$; ზ) 3; თ) $1/40$. **3.** ა) 12; ბ) 30; გ) 2,5; დ) 1,2; ე) 0,44; ვ) 18. **4.** ა) ტოლია; ბ) ტოლია; გ) ტოლია; დ) ტოლია. **6.** 2,52 კგ; 1680 კგ; **7.** 495. **8.** 1,5-ჯერ. **9.** 140. **10.** 204 კმ; 36 კმ. **11.** 58. **12.** 256. **13.** $5/8$. **14.** 10,5 გ. **15.** 28 ლარი. **16.** 6. **17.** 25,1 სმ.

2. **1.** ა) 100; ბ) 150; გ) 175; დ) 420; ე) 39; ვ) 300; ზ) 25; თ) 300. **2.** რიცხვი, რომლის 60 % არის 80. **3.** 24. **4.** ა) 200; ბ) 500; გ) 1 000; დ) 30 000. **5.** 10. **6.** 1500; 150. **7.** 24. **8.** 150 კმ; 123 კმ. **9.** 10 სმ; 40 სმ. **10.** 150 წთ. **11.** 2000 ლარი. **12.** ა) 105° ; ბ) $82,5^\circ$.

3. **1.** ა) 24; ბ) 75; გ) 24; დ) 40; ე) 44; ვ) 250. **2.** ა) 50 %; ბ) 25; გ) 36. **3.** ა) 3; ბ) 0,4; გ) 20; დ) 2,5; ე) 25; ვ) 5. **4.** ა) 5; ბ) $25/3$; გ) 62,5; დ) $100/9$. **5.** 25%; $425/9\%$. **6.** 12. **7.** $100/11\%$; $50/3\%$. **8.** $33\frac{1}{3}\%$; 240 გვერდი. **9.** $\approx 92\%$. **10.** 20 %. **11.** 25 %. **12.** 21 %. **13.** არ შეიცვლება. **14.** 50%-ით. **15.** ა) $50/3\%$; ბ) 25 %; გ) $200/3\%$; დ) $250/3\%$. **16.** K(2). **17.** 90° .

4. **1.** 960 ლარი, 36%-ით. **2.** 42 %-იანი. **3.** იგივე რაოდენობის გაიყიდა. **4.** 62,5%; $200/17\%$. **5.** 25 %. **6.** 57°C . **7.** 425 %-ით. **8.** 72 ცალი; 1704 ლარი; $\approx 70\%$. **9.** ა) სოფიკოს $66\frac{2}{3}\%$ -ით; ბ) გურამს 40%-ით. **10.** რობოტ. – 36, ასტრონ. – 54, გეომეტ. – 30. **11.** არა. **12.** 16 000 ლარი. **13.** 300 %. **14.** 25 წმ. **15.** 40 ლარი; 20%-ით; 10%-ით. **16.** 78%. **17.** 40%. **18.** 36 სმ. **19.** 567. **20.** 28° .

5. **1.** ა) კი; ბ) არა; გ) არა; დ) არა. **2.** 1,7 ლ; 4,25 ლ. **3.** ა) 45 კმ; ბ) 225 კმ; გ) 30 კმ. **4.** 21 წთ. **5.** 1,2 ლ; 15 ბოთლი. **6.** 6 მ^2 ; 20 ლიტრი. **7.** 900 გ ფქვილი და 375 გ შაქარი. **8.** 26 სმ; 95 კმ. **9.** 1:1 000 000. **10.** 2 კმ; 10 სმ. **11.** 21 კმ; 21 კმ. **12.** 378 გვერდი. **13.** 1) ≈ 81 კგ; 2) ა) 45,6 კგ; ბ) 138 კგ. **14.** 5 სთ. **15.** 36 წთ.

6. 1. ა) 8, 12; ბ) 36, 60; გ) 40, 100, 160; დ) 49, 63, 42. **2.** ა) 2:5:7; ბ) 2:3:5. **3.** 59 სმ. **4.** ა) 2:3:6; ბ) 6:8:9; გ) 12:20:15. **5.** 6000 ლ, 10000 ლ. **6.** 33. **7.** 92 კგ სპილენძი, 23 კგ კალა, 3910 ლ. **8.** 300. **9.** 32 000. **10.** 3:7; არა. **11.** 18 სმ. **12.** ევერესტი 8880 მ; იალბუზი 5630 მ; მყინვარწვერი – 5000 მ. **13.** ნინოს 36 ლ; ნანას 63 ლ. **14.** 41:29. **15.** ა) 9:12:20; ბ) 8:20:45. **16.** ა) 60% ბ) $166\frac{2}{3}\%$.

7. 1. ა) არა; ბ) არა; გ) არა; დ) კი. **2.** ა) პირდაპირპროპორციული; ბ) უკუპროპორციული; გ) პირდაპირპროპორციული; დ) პირდაპირპროპორციული. **3.** 10 დღე. **4.** 4. **5.** 4 სთ. **6.** 12 კმ/სთ. **7.** 16. **8.** 140 კმ. **9.** შევამცირით 5-ჯერ. **10.** 8 წთ. **11.** 5 სთ. **12.** 12,5 სთ. **13.** 4,5 სთ. **14.** 6 დღე. **15.** 3 დამხმარე. **16.** ა) 5:3; ბ) 5:12.

8. 3. ა) 7; ბ) 5; გ) -1,7. **4.** ა) 9; ბ) 5; გ) -0,9; დ) -45. **5.** 4. **6.** 1,8 ლარი. **7.** ა) -2; ბ) -3; გ) 0; დ) $-\frac{165}{37}$; ე) 0; ვ) 0. **9.** ა) 2, 8; ბ) $\frac{1}{2}$; $-2\frac{1}{3}$; გ) $1\frac{1}{3}$; დ) 3; -9; 7; ე) -11; $2\frac{1}{3}$; $3\frac{1}{2}$; ვ) -3; -1; 0. **10.** 6,4 სთ. **12.** 60°. **13.** 6 სთ.

9. 1. ა) 6; ბ) 13; გ) -3; დ) -1,5; ე) $\frac{17}{7}$; ვ) 2; ზ) 0; თ) 1,15; ი) R; კ) -50. **2.** ა) 4 ბ) $\frac{5}{7}$; გ) $-\frac{10}{7}$; დ) 4,1; ე) -10; ვ) R. **3.** ა) -1; ბ) -10; გ) 5; დ) -1/8; **4.** 24 **5.** 2,5 კგ; 22,5 ლარი. **6.** -7,5. **7.** ა) 1 ბანანი; ბ) პური – 700გ; რძე – 900გ; ყველი – 500 გ. **8.** ა) $\frac{7-2n}{3}$; ბ) $\frac{2n-1}{2}$. **10.** ა) 2; 8; ბ) -11; 8; გ) ± 12 ; ± 2 ; დ) -4; 6. **11.** ა) 1; 5; ბ) 3; 8. **12.** 39 სმ. **13.** 400 კგ.

10. 1. ა) 15; ბ) 3. **2.** 8 წლის; 6 წლის შემდეგ. **3.** საზამთრო – 12კგ, ნესვი – 6კგ. **4.** 2-ჯერ. **5.** სიგრძე – 12 სმ, სიგანე – 4 სმ. **6.** 800; 1000. **7.** 144 ლარი; კი. **8.** 5:3. **9.** 130 კმ. **10.** 10 დღე; 180 ც. **11.** 1,5 კმ. **12.** 5/3-ჯერ. **13.** 144 მ. **14.** ანამ – 8; გიორგიმ – 32, ოთარმა – 50. **15.** ოქრო – 1, ვერცხლი – 4, ბრინჯაო – 4. **16.** I – 14 წიგნი, II – 10 წიგნი, III – 21 წიგნი. **17.** 200 გვერდი; 489 ციფრი. **18.** 3. **19.** 8 სავარძელი, 16 მაგიდა. **20.** 150 %.

III თავის დამატებითი სავარჯიშოები: **1.** ა) 144; ბ) 280; გ) 230; დ) 16; ე) 216; ვ) 270; ზ) 432. **2.** ა) 10; ბ) 27; გ) 20; დ) 27. **3.** 247,5 გ; 1,65 ლიტრი. **4.** 0,6 კგ. **5.** ა) 19,2 ლარი; ბ) 28,8 ლარი. **6.** ა) 23 ლ 50 თ; ბ) 10. **7.** 25 %. **8.** 6,5 მლნ კმ². **9.** 20 გ. **10.** 4 ბოთლი. **11.** 36 ნაძვი, 24 %. **12.** 30 %. **13.** 50 %. **14.** 0,44 დმ. **15.** ა) 26, 39, 65; ბ) 27, 108, 72; გ) 40, 60, 90. **16.** 1 : 500 000; 13 სმ. **17.** ა) 0,5m ლარი; ბ) 2m ლარი; გ) 1,75m ლარი; დ) 0,25 mn ლარი. **18.** 66. **19.** 1ლ 50 თ. **20.** 36 ლარი; 204 ლარი. **21.** 20 %-ით. **22.** 37,5 %-ით **23.** ა) 144° და 36°; ბ) 100° და 80°. **24.** 2240 გ. **25.** ა) 750; ბ) 810. **26.** 900. **27.** 10 გ. **28.** ა) 108; ბ) 72; გ) 135. **29.** 1,5 დმ. **30.** 125 ფოტო, 25 %-ით მეტი. **31.** 24 მ; 16 სმ. **32.** 9:12:28. **33.** 2 სთ 15 წთ. **34.** 6 დღე. **35.** 1; 25 %-ით. **36.** ა) 18 სმ; ბ) 40 სმ. **37.** 147,50. **38.** 15 დღე **39.** 6. **40.** ა) 5/3; ბ) 17/9; გ) 7; დ) 0,3; ე) 0; ვ) -29; ზ) 0; თ) -5. **41.** ა) 13/4; ბ) 4; გ) 0; დ) 2,2. **42.** ა) 16/23; ბ) -2,1. **43.** ა) ორი ბ) ორი გ) არცერთი დ) ერთი **44.** ა) 6; ბ) 12. **45.** არა **46.** 39. **47.** 10 **48.** 2 კმ/სთ. **49.** 105 ლარი **50.** 400 გვერდი; 10 დღე **51.** 288. **52.** 25 %-ით მეტი. **53.** 20%-იანი **54.** ა) 300; ბ) 800; გ) 450. **55.** 1 სთ 30 წთ.

თავი IV:

2. 1. ა) სამი; ბ) ხუთი. **2.** 10 სმ. **3.** 61 სმ. **6.** 14 დმ. **9.** 200 სმ. **10.** 65 სმ. **11.** 33 სმ. **12.** 11,6 სმ. **13.** 25 დმ, 36 დმ, 12 დმ; **14.** 38 სმ. **15.** 10 მ. **16.** 25 მ ან 17 მ. **17.** 2,4 სმ; 3,6 სმ; 4,8 სმ. **18.** 20 სმ. **20.** ა) ჭ.; ბ) ჭ.; გ) მცდ.; დ) მცდ.

3. 2. ა) 60° ; ბ) 122° ; გ) 88° . **3.** $82^\circ, 82^\circ$. **4.** $45^\circ, 63^\circ, 72^\circ$. **5.** 90° . **6.** $40^\circ, 80^\circ, 60^\circ$. **7.** მახვილკუთხა. **8.** 60° . **9.** $35^\circ, 55^\circ$. **10.** ტოლია. **11.** არა. **12.** $20^\circ, 70^\circ, 90^\circ$.

4. 1. 70° . **2.** 110° . **3.** $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$. **4.** $133^\circ, 102^\circ, 125^\circ$. **5.** 90° . **6.** 720° . **7.** არა. **8.** $60^\circ, 70^\circ, 50^\circ$. **9.** 100° . **10.** 31° .

5. 4. 5სმ, 5სმ, 5სმ. **5.** 6 სმ, 6 სმ, 7,5 სმ, 7,5 სმ, 10,5 სმ, 10,5 სმ. **6.** 10 სმ. **7.** 24 სმ. **8.** 13 სმ.

6. 1. 50° . **2.** $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$. **3.** $45^\circ, 45^\circ$. **4.** 82° . **5.** $\triangle ABM$ -ში: $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$; $\triangle AMC$ -ში: $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$. **6.** 122° .

7. 3. $42^\circ, 38^\circ$. **4.** 11° . **5.** $\triangle BAM$ -ში: $64^\circ, 26^\circ, 90^\circ$; $\triangle BAN$ -ში: $32^\circ, 58^\circ, 90^\circ$. **6.** $34^\circ, 56^\circ$. **7.** 17° . **8.** 120° . **10.** $44^\circ, 70^\circ, 66^\circ$.

IV თავის დამატებითი სავარჯიშოების პასუხები: **1.** 3-ჯერ. **2.** 5-ჯერ. **3.** 0,3 სმ, **4.** 22 სმ. **5.** 14 მ, ან 11 მ, ან 12,5 მ. **6.** 25 სმ. **7.** 12 სმ. **8.** $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. **9.** 60° . **10.** 91° . **11.** 18 სმ. **12.** $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. **14.** არა. **15.** არა. **16.** $26^\circ, 102^\circ, 52^\circ$. **17.** 11 სმ. **18.** 24 სმ. **19.** 146° **20.** 82° და 98° . **21.** 40° . **22.** 5 სმ-ით. **23.** 39° . **24.** 18 სმ, ან 12 სმ. **25.** 60° . **26.** 50° . **27.** 56° . **28.** 39° და 51° . **29.** 78° . **30.** 36° .



I-IV თავების საგნობრივი საძიებელი

არიტმეტიკულ მოქმედებათა	რაციონალური რიცხვების გამრავლება	56
თვისებები	გაყოფა	57
აქსიომა	რიცხვითი ლერძი	33
გამოსახულება ასოითი	რიცხვის დაყოფა პირდაპირპროპორციულ	
რიცხვითი	ნაწილებად	149
განტოლება	რიცხვის პოვნა პროცენტის მიხედვით	130
განტოლებები ტოლფასი	რიცხვის პროცენტული შეფარდება	135
განტოლების ამონახსნი	რიცხვის პროცენტული ჩანაწერი	125
გეომეტრიული ფიგურა	რიცხვები დადებითი	33
დამატებითი სხივები	მოპირდაპირე	41
ელემენტი სიმრავლის	რაციონალური	34
ვერტიკალური კუთხეები	უარყოფითი	33
კოეფიციენტი	სიმრავლე	22
კოორდინატი წერტილის	უსასრულო	23
კუთხე	სასრული	23
კუთხე ბლაგვი	ცარიელი	23
გაშლილი	სამკუთხედი	188
მართი	ბლაგვკუთხა	192
მახვილი	მართკუთხა	192
კუთხის ბისექტრისა	მახვილკუთხა	192
მოდული რიცხვის	სხვადასხვაგვარა	192
მონაკვეთი	ტოლგვერდა	191
მოსაზღვრე კუთხეები	ტოლფვერდა	191
მსგავსი წევრები	სამკუთხედის ბისექტრისა	206
ნახევარსიბრტყე	სამკუთხედის გარე კუთხე	200
ოქროს კვეთა	სამკუთხედის მედიანა	203
პარალელური წრფეები	სამკუთხედის სიმაღლე	208
პირველადი ცნება	სხივი	82
პირდაპირპროპორციული სიდიდეები	უკუპროპორციული სიდიდეები	153
პროცენტი	ფრჩხილების გახსნა	62
პროცენტული კონცენტრაცია	ქვესიმრავლე	24
რაციონალური რიცხვების შეკრება	ჩვეულებრივი წილადის გადაქცევა	
გამოკლება	ათწილადად	16

ნიგნში გამოყენებული მათემატიკური ნიშნების ცხრილი

$ a $	a რიცხვის მოდული
N	ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე
Z	მთელ რიცხვთა სიმრავლე
Q	რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე
$\emptyset$	ცარიელი სიმრავლე
$\subset$	ქვესიმრავლე
$\in$	ეკუთვნის (სიმრავლეს)
$\notin$	არ ეკუთვნის (სიმრავლეს)
$\cup$	გაერთიანება (სიმრავლეთა)
$\cap$	თანაკვეთა (სიმრავლეთა)
$a < b$	a ნაკლებია b -ზე
$a > b$	a მეტია b -ზე
$a \leq b$	a ნაკლებია ან ტოლია b -ზე
$a \geq b$	a მეტია ან ტოლია b -ზე
$a \parallel b$	a პარალელურია b -სი
$\angle$	კუთხე
$\perp$	მართობული
1°	1 გრადუსი
$1'$	1 მინუტი

ნიკოლოზ მუსხელიშვილი (1891-1976) იყო მსოფლიოში აღიარებული ქართველი მათემატიკოსი, ქართული მათემატიკური სკოლის ერთ-ერთი ფუძემდებელი, რომლის სამეცნიერო ნაშრომებმაც უდიდესი წვლილი შეიტანა მათემატიკის, ფიზიკისა და ინჟინერიის განვითარებაში.

მუსხელიშვილის იდეები და მეთოდები დღესაც აქტიურად გამოიყენება თანამედროვე ტექნოლოგიებში, მშენებლობაში, მექანიკასა და მეცნიერების მრავალ სხვა დარგში. სწორედ მუსხელიშვილის პრინციპებით მოწმდება ხიდების, შენობებისა და სხვა მასშტაბური კონსტრუქციების უსაფრთხოება. ეს ნათლად გვაჩვენებს, რომ მათემატიკა მხოლოდ თეორია არ არის – ის რეალური, ყოველდღიური პრობლემების გადაჭრის საშუალებაა.

სწორედ ამიტომ ის, რასაც შენ ახლა სკოლაში ისწავლი – რიცხვები, განტოლებები, გეომეტრია – წარმოადგენს იმ ცოდნის საფუძველს, რომელიც მეცნიერებასა და ტექნოლოგიებში გამოიყენება. მათემატიკა გეხმარება, იფიქრო ლოგიკურად, მიიღო სწორი გადაწყვეტილება და აღმოაჩინო გარემომცველი სამყაროს კანონზომიერებები.

